Universidad Tecnológica
de Pereira

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA

ENSEÑANZA DE LA DIMENSIÓN FRACTAL USANDO EL PRINCIPIO DE AUTO SEMEJANZA CON GEOGEBRA A ESTUDIANTES DE LA BÁSICA MEDIA EN LA I.E NUESTRA SEÑORA DE GUADALUPE DE DOSQUEBRADAS RDA

Márquez Vera Jose Alirio

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

PEREIRA

2017

TRABAJO PARA OPTAR AL TITULO DE MAGISTER EN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

Pedro Pablo Cárdenas Alzate, Ph.D(c)

ENSEÑANZA DE LA DIMENSIÓN FRACTAL USANDO EL PRINCIPIO DE AUTO SEMEJANZA CON GEOGEBRA A ESTUDIANTES DE LA BÁSICA MEDIA EN LA I.E NUESTRA SEÑORA DE GUADALUPE DE DOSQUEBRADAS RDA

Márquez Vera Jose Alirio

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

PEREIRA

2017

La vida es buena por solo dos cosas,

descubrir y enseñar las matemáticas.

Simeon Poisson (1781 - 1840)

La verdad se encuentra en la simplicidad y no

en la multiplicidad y confusión de las cosas.

Isaac Newton (1642-1727)

Las matemáticas tienen belleza y romance.

El mundo de las matemáticas no es un lugar

aburrido en el que estar. Es un lugar extraordinario;

merece la pena pasar el tiempo allí.

Marcus du Sautoy (1965 -)

Agradecimientos

Quiero expresar mis más sinceros agradecimientos a:

- Pedro Pablo Cárdenas Alzate, por su compromiso, paciencia, persistencia y amor por lo que hace en el desarrollo de este proceso formativo; a los compañeros de la cohorte de la Maestría en enseñanza de la matemática, por su valiosa cooperación y apoyo durante los seminarios de la misma.

- Al Rector Orlando Millán Triana, a los docentes Diana Peña, Fredy Suarez de la Institución Educativa Nuestra Señora de Guadalupe por los espacios proporcionados para llevar a cabo este trabajo y al Mg. Cristian García por toda su ayuda y colaboración.

- A los estudiantes y padres de familia del grado 8°A del colegio Nuestra Señora de Guadalupe por brindar su autorización y su valiosísima colaboración durante todo el proceso investigativo, ya que sin ellos nunca se hubiese podido llevar a cabo este trabajo.

- A mi esposa Jessica, a mis hijos Emmanuelh y Daniel, a mi madre Lucila Vera, hermanos y a mi fallecido padre por toda su paciencia, comprensión y amor durante todo el estudio; a Dios por mantenerme con fuerza en todo momento y a aquellos que de forma directa o indirecta me ayudaron en la consecución de este logro.

Tabla de Contenido

Lista de gráficas

Lista de tablas

Lista de ilustraciones

Resumen

Esta investigación empleó el estudio de tipo cuantitativo siguiendo un enfoque socio-constructivista, buscó medir y analizar el aprendizaje de la dimensión fractal usando el principio de auto-semejanza con GeoGebra y otras herramientas tecnológicas por medio del aprendizaje colaborativo, diseñando e implementando una unidad didáctica basada en la teoría de situaciones didácticas Guy Brousseau[1] en estudiantes de grado Octavo de la institución educativa Nuestra Señora de Guadalupe en la ciudad de Dosquebradas Risaralda.

Se utilizaron como métodos y herramientas de estudio, el cuestionario y la observación no participante como son guías con actividades de clase, fotos y videos.

En el aprendizaje colaborativo, se requiere que los estudiantes desarrollen trabajo grupal e individual, y sean acompañados por el docente para potenciar sus habilidades, sobrepasar sus dificultades y trabajar en el desarrollo de objetivos en común, implementando así nuevos procesos de enseñanza que ayudan a mejorar el quehacer diario dentro del aula de clase en la búsqueda de un aprendizaje significativo. Por medio de la teoría didáctica de Guy Brousseau se plantean actividades variadas que generan motivación propia y mejoran los procesos de autorregulación en los estudiantes, así como un crecimiento conceptual en la adquisición de nuevos tópicos como son el tema de la dimensión fractal usando el principio de auto-semejanza con GeoGebra y el uso de una geometría no clásica para describir y entender fenómenos a su alrededor. Este trabajo es un aporte más para toda la comunidad que investiga en el campo de la

[1] Guy Brousseau (1933-): Investigador francés, especialista en didáctica de la matemática.

didáctica de la matemática y específicamente en la enseñanza de la geometría fractal utilizando herramientas tecnológicas.

Palabras claves: Socio-constructivismo, aprendizaje colaborativo, teoría de situaciones didácticas de Guy Brousseau, enseñanza de la dimensión fractal, auto-semejanza, unidad didáctica, GeoGebra, TIC.

Capítulo 1

Introducción e información general

Enseñar en secundaria hoy día es un reto, dados los diferentes intereses y cambiantes condiciones sociales además de las políticas educativas que han hecho más difíciles las condiciones al interior de las aulas por las variadas dinámicas sociales que confluyen gracias a la famosa “cobertura” y el sistema de promoción actual. Por esto el docente está llamado a buscar y aplicar diferentes tipos de estrategias que le permitan mantener motivado al estudiante, explorar, apropiarse del conocimiento y superar los obstáculos en los procesos de aprendizaje. Es aquí donde los docentes de matemática deben hacer uso de las investigaciones en didáctica en la enseñanza de la misma para buscar diferentes formas de aprendizaje que conduzcan a mejorar las intervenciones en el aula teniendo en cuenta aspectos como: El andamiaje, la comprensión de los conceptos, uso del lenguaje, la motivación, los procesos de autorregulación y la interacción con los demás estudiantes, para que haya un aprendizaje colaborativo de la matemática.

De esta manera el presente estudio utilizó el aprendizaje colaborativo [13] para la enseñanza de la dimensión fractal usando el principio de auto-semejanza con GeoGebra, aplicando la teoría didáctica de Guy Brousseau [3], con el enfoque socio-constructivista [10].

Primero se indagaron las contribuciones de diferentes investigadores respecto a los temas centrales de este estudio. En segunda instancia, se desarrollaron algunos aspectos teóricos relacionados con la didáctica de la matemática, el aprendizaje colaborativo, el enfoque socio constructivista, conceptos de geometría fractal y dimensión fractal por auto-semejanza, con algunos ejemplos. Luego la investigación se centró en describir los aspectos metodológicos para un diseño con enfoque cuantitativo, así como el estudio, recolección y discusión de los diferentes resultados desde esta óptica.

Para terminar, se dieron las conclusiones y recomendaciones referentes a la didáctica de la matemática y destacando los principales hallazgos al interior del aula de clases según la aplicación realizada.

Se pudo determinar que en la enseñanza de un concepto matemático, el aprendizaje colaborativo mediado por un medio tecnológico promueve una mejor aprehensión del conocimiento. Además de fortalecer y desarrollar habilidades en los estudiantes cuando se plantean en el aula procedimientos y estrategias estructurados según la teoría de Guy Brousseau, sin dejar de lado que la motivación y la autorregulación son factores primordiales en cualquier tipo de aprendizaje.

1.1 Ámbito Problémico

La didáctica de la matemática es una disciplina científica que permite encontrar diferentes tipos de investigaciones con respecto al aprendizaje y enseñanza de las mismas, allí se estudian las formas variadas de adquirir y utilizar diferentes tipos de conceptos matemáticos, usando en muchas investigaciones el aprendizaje colaborativo y diferentes teorías didácticas de la matemática entre las cuales se mencionara la de Guy Brousseau. Se deben responder varias interrogantes para enfocar el presente estudio como por ejemplo ¿Cómo se desarrolla el aprendizaje de la geometría en el aula actualmente?

La aplicación de la metodología tradicional en la enseñanza actual de la matemática es algo que influye directamente en la motivación del estudiante y en otros aspectos, ya que se centra más en los procesos memorísticos que en un aprendizaje significativo, sumado a los prejuicios culturales, que hacen preocupar más al estudiante solo por la aprobación, buscando en muchas ocasiones notas con un desempeño básico (3.0 – 3.9), lo que supondría un aprendizaje superficial dejando de lado el análisis, la sustentación y el pensamiento crítico.

En geometría es evidente según las pruebas saber de los diferentes niveles tanto de educación primaria y secundaria, que los estudiantes tienen muchas dificultades pues no manejan adecuadamente conceptos básicos, debido a que en muchas instituciones educativas no se enseña cómo deberían o simplemente no se enseñan. Según [14] el problema actual en la enseñanza de la geometría está ligado a la cantidad excesiva de reformas educativas desde 1903 hasta ahora. Lo que se expuso anteriormente hace necesario que la comunidad educativa busque y aplique alternativas didácticas que mejoren tanto la dinámica en el aula como la comprensión de las diferentes temáticas y que se puedan realizar, mediante un trabajo colaborativo, para que ayude a los estudiantes a madurar en procesos convivenciales y en los cognitivos, permitiendo además que estos superen sus dificultades.

Es así como surge la pregunta de investigación: ¿Cómo promover el aprendizaje del concepto de dimensión fractal aplicando el principio de auto-semejanza con GeoGebra a estudiantes de grado 8 de una institución educativa de la ciudad de Dosquebradas Rda?

Es así que la presente investigación pretendió enseñar el concepto de dimensión fractal usando el principio de auto-semejanza con ayuda de medios tecnológicos y material didáctico, diseñando e implementando una unidad didáctica con un enfoque socio constructivista, que le permita tener mayor protagonismo al estudiante aplicando el aprendizaje colaborativo y teniendo en cuenta la teoría didáctica de la matemática de Guy Brousseau, brindando a la comunidad educativa aspectos teóricos y metodológicos que mejoren la enseñanza y aprendizaje de la matemática, sin olvidar aspectos como la motivación, la autorregulación y el aprendizaje significativo con el fin de mejorar sus niveles de desempeño principalmente en su componente geométrico.

Este trabajo es un aporte importante para los docentes de matemática sobre todo de secundaria a nivel nacional y regional, ya que son pocas las investigaciones que se realizan sobre la enseñanza de la geometría fractal. A continuación se citan algunos referentes investigativos relacionados con los temas centrales del presente trabajo.

A nivel regional, recientemente se realizó el trabajo “Elementos de la geometría fractal como estrategia didáctica para el desarrollo del pensamiento geométrico en estudiantes de la media básica del C.E. bachillerato en bienestar rural sede Ciato en el municipio de Pueblo Rico, Risaralda mediante elementos de la naturaleza” de la Universidad Tecnológica de Pereira [4], el cual tiene el propósito de presentar una propuesta que integre la enseñanza fractal en el plan de estudios de décimo grado de bachillerato, dicha propuesta se estructura por medio de la presentación de una metodología y un material didáctico dirigido por el profesor a través del cual se desarrollan los conceptos básicos de la Geometría Fractal.

En Colombia solo a nivel universitario se puede encontrar la Geometría fractal como objeto de estudio en tres instituciones con mayor impulso:

1) La Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia viene desarrollando un curso a nivel universitario sobre Geometría Fractal en la Escuela de Matemáticas y Estadística.

2) El Grupo Fractales de la Universidad Industrial de Santander con varias monografías de pregrado, entre las que cabe resaltar “Sobre la introducción de la Geometría Fractal en la secundaria”

3) El Grupo Fractales DMA-UPN, que tiene en proyecto “Diseñar, implementar y sistematizar una propuesta de actividades dirigida a los estudiantes de la Educación Básica y Media, sobre las temáticas propias del Currículo tradicional de Matemáticas y su relación con los fractales”

Otro referente es el artículo “Los Fractales: una alternativa para la enseñanza de la matemática” realizado por [20] en la Universidad de los Andes donde explican el programa Fractales 1.0, y se manifiestan las bondades de enseñar con computadores.

En la Universidad Tecnológica de Pereira encontramos el artículo “Geometría Fractal y transformada de Fourier” [21], allí se da una corta explicación de lo que es un fractal, se explica el concepto de dimensión con algunos ejemplos y se muestra la estrecha relación entre la geometría fractal, las leyes de potencias y la transformada de Fourier.

A nivel internacional se citaran 2 referentes como lo es el trabajo “Aplicaciones del teorema del punto fijo: Fractales” de la Universidad de Murcia [11] donde se hace un abordaje histórico, se describe que es un fractal, su dimensión y como dibujarlos a partir de procesos iterativos y se definen algunas propiedades topológicas.

También la tesis de maestría “Fractal dimension and Julia sets” de la Eastern Washington University [5], donde se explica la teoría del caos, los fractales y la dimensión fractal además de los sistemas de funciones iteradas. De esta manera se presentan algunas investigaciones respecto al tema, donde se muestra la pertinencia de desarrollar el presente estudio.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo General

Diseñar e implementar una unidad didáctica que promueva el aprendizaje del concepto de dimensión fractal usando el principio de auto-semejanza con GeoGebra a estudiantes de la básica media en la I.E Nuestra Señora de Guadalupe de Dosquebradas, Rda.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Elaborar y emplear un cuestionario que permita obtener un punto de referencia de los desempeños iniciales en los estudiantes respecto a conceptos básicos de geometría fractal.

- Diseñar y aplicar una unidad didáctica para mejorar los desempeños iniciales sobre el concepto de dimensión fractal usando el principio de auto-semejanza en estudiantes de la básica media en la I.E Nuestra Señora de Guadalupe de la ciudad de Dosquebradas Rda con apoyo de las TIC y material didáctico.

- Contrastar los resultados iniciales con los finales aplicando un post test, analizando sí la unidad didáctica promueve el aprendizaje de la dimensión fractal.

Capítulo 2

Marco Teórico

Este trabajo se elaboró inicialmente describiendo algunos aspectos relacionados con la didáctica de la matemática, el aprendizaje colaborativo, el enfoque socio constructivista y la teoría de Guy Brousseau en la enseñanza de la matemática, por último se realiza la descripción teórica sobre los conceptos de dimensión y geometría fractal.

2.1 Enfoque Pedagógico.

Para los profesores de ciencias exactas es una herramienta fundamental tener presente concepciones como “didáctica de matemática” a la hora de realizar su labor porque resulta una ayuda importante para el trabajo en la escuela, el colegio y/o la educación superior porque hay una retroalimentación entre teoría, práctica y tecnología, ya que el objeto de estudio de esta disciplina son los procesos de enseñanza y aprendizaje de la misma [27].

Así para encaminar la presente investigación se utilizó el modelo pedagógico Socio Constructivista como lo mencionan en su informe [19] es un modelo derivado del constructivismo y presenta que el entorno de aprendizaje más óptimo es donde hay interacción dinámica entre profesores, estudiantes y las actividades que sirven de medio para que estos creen su propia verdad, gracias a la interrelación con los otros, este enfoque tiene como propiedad que le brinda un rol protagónico al estudiante, y el docente interviene como un mediador del proceso de aprendizaje donde uno de los elementos principales es el lenguaje. A continuación se muestran las principales condiciones de este enfoque:

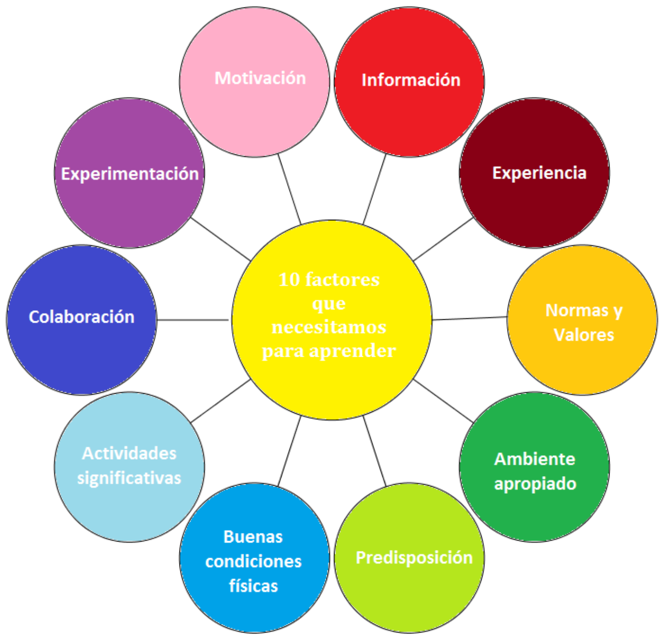


Figura 1. Factores que propone el Socio Constructivismo para favorecer el aprendizaje.

2.2. Referente al aprendizaje Colaborativo.

La teoría de aprendizaje que se utilizó fue el aprendizaje Colaborativo/Cooperativo, el cual potencia destrezas individuales y grupales, como la adquisición del conocimiento mejorando también habilidades sociales bajo la premisa de la igualdad. Aquí hay una autoridad y responsabilidad compartida, se trabaja desde grupos pequeños hasta una comunidad próxima. Los 5 componentes tomados de [23] sobre los cuales se fundamenta el aprendizaje colaborativo son:

- Interdependencia positiva: Esta se genera al interior del equipo de trabajo y es consecuencia positiva ya que todos los miembros del grupo trabajan en la consecución de una meta en común. En este esquema de trabajo el aporte individual se hace indispensable para lograr las metas propuestas.

- Interacción cara a cara: Se centra en el contacto cara a cara entre los integrantes del equipo, lo cual posibilita el desarrollo de habilidades sociales tales como: la escucha, el respeto por el otro, la solidaridad y la democratización de las decisiones.

- Contribución individual: Conduce a que el estudiante asuma un papel participativo en el proceso, a través de actividades que le permitan exponer e intercambiar ideas, aportando opiniones y experiencias, convirtiendo así la tarea del equipo en un foro abierto a la reflexión y al contraste crítico de pareceres y opiniones.

- Habilidades personales y de grupo: Potencia el desarrollo de habilidades personales y grupales en torno a objetivos comunes. A nivel individual se desarrolla la comunicación e interacción con otros, la habilidad de escuchar activamente, hablar por turnos, aceptar la diversidad, compartir, intercambiar y sintetizar ideas, entre otras más. A nivel grupal las habilidades que se desarrollan son la capacidad de planificar cooperativamente, de auto organizarse, autorregularse y tomar decisiones en equipo.

- Autoevaluación del equipo: Es de gran trascendencia al interior del equipo, para que se establezcan mecanismos continuos de reflexión, sobre la efectividad del equipo con relación a las metas propuestas, de tal manera que se asegure la autorregulación y se asuman directrices para futuros trabajos.

2.3. Acerca de la unidad didáctica.

El fin de diseñar una unidad didáctica es facilitar los procesos de aprendizaje y enseñanza en el aula, además de mejorar las relaciones entre pares. Es un elemento que permite direccionar de mejor manera la práctica docente; [8] la define como el "sistema que interrelaciona los elementos que intervienen en el proceso de enseñanza y aprendizaje, con una alta coherencia metodológica interna, empleándose como instrumento de programación y orientación de la práctica docente. Se estructura mediante un conjunto de actividades que se desarrollan en un espacio y tiempo determinado para promover el aprendizaje de los estudiantes". En la *figura 2*, se muestran los elementos más importantes que debe tener una unidad didáctica la cual debe planificarse con factores como la regulación y autorregulación, entre otros.

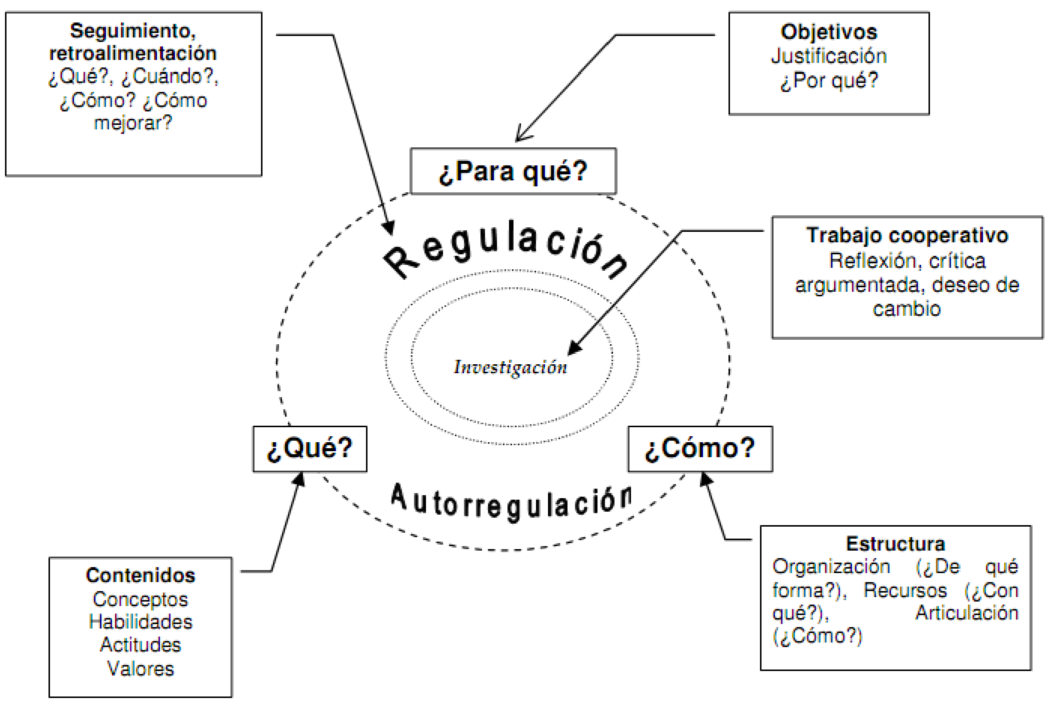


Figura 2. Elementos de una unidad didáctica.

Se puede apreciar que en una unidad didáctica deben estar presentes los procesos de enseñanza y aprendizaje en el aula, además esta es una herramienta que permite la identificación de las fortalezas y obstáculos en los estudiantes, permitiendo además tener uso óptimo del tiempo, es así que se aplicó esta metodología para la enseñanza del concepto de dimensión fractal usando el principio de auto-semejanza con GeoGebra en el presente estudio. En cada una de las sesiones de la unidad didáctica se utilizó la teoría didáctica de la enseñanza de la matemática de Guy Brousseau, el cual plantea realizar un abordaje de las situaciones didácticas o adidácticas diseñando situaciones construidas intencionalmente con el fin de hacer adquirir a los estudiantes un saber determinado [18], esta teoría se desarrolla en cuatro fases a saber:

Fase 1: *Acción*. Solo se presenta la situación; esta fase es la puesta en acto de los conocimientos implícitos.

Fase 2: *Formulación*. A partir de preguntas generadoras se realizan los cuestionamientos y los estudiantes buscan responder los mismos para llegar a una verdad propia.

Fase 3: *Validación*. Se enuncia por grupos o de forma individual lo obtenido, se refuta y/o se llega a una verdad, este es un proceso entre estudiantes para probar quien tiene la razón.

Fase 4: *Institucionalización*. El docente como mediador del proceso guía a los estudiantes a las conclusiones aceptadas por todos, con base en las discusiones de la *Fase 3*.

2.4. Geometría fractal, dimensión y GeoGebra.

"El mundo está compuesto por una gran cantidad de objetos que definen nuestra propia complejidad, estos tienen una gran cantidad de pormenores que a simple vista no son discriminados por nuestros ojos, ni tampoco por algún instrumento artificial. Estos objetos son observados desde los intrincados detalles de nuestros cuerpos hasta la gran expansión del universo, hay muchas imágenes que no pueden ser descritas desde la noción normal de vistas dimensionales o sea las dimensiones vistas desde la geometría euclidiana, estas misteriosas imágenes son llamados fractales" [5]. Los cuales generaron una nueva intriga tanto para matemáticos y científicos aproximadamente entre los años 60 y 70.

Uno de los primero fractales estudiados fue el Conjunto de Cantor[2] en 1874. Aunque, no se conocía el término de fractal ni sus propiedades. Estas cuestiones fueron descubiertas décadas más tardes por Benoit Mandelbrot[3], quien adoptó el termino fractal del latín "*Fractus*" (roto o fracturado) en 1975. Mandelbrot trabajaba como ingeniero de la empresa IBM, estudiando un ruido en las líneas telefónicas, en esa época la información era transmitida de una a otra computadora usando pequeñas corrientes eléctricas. Sin embargo, se empezó a notar una interferencia en forma de ruido que se transmitía cierto intervalo de tiempo, causando errores, esta falla ocurría aparentemente al azar, y los ingenieros deseaban corregir ese error.

Mandelbrot descubrió que, aunque el ruido parecía ocurrir al azar, sucedía a diferentes escalas durante la transmisión, y la proporción de ruido de error y de transmisión sin ruido era constante. Así dado un período de tiempo cuando existía error, la relación de error a transmisión limpia en un segundo fue la misma que la relación de error de transmisión limpia en una hora. Mandelbrot encontró una abstracción del conjunto de Cantor, que fue desarrollado muchas décadas antes" [5].

[2] Georg Cantor (1845-1918): Matemático Ruso, padre de la teoría de conjuntos.
[3] Benoit Mandelbrot (1924-2010): Matemático Polaco, principal precursor del estudio de los fractales.

Es muy difícil definir qué es exactamente una forma fractal ya que hay varias maneras de construirlos y si nos remitimos a la teoría del caos es apenas lógico que no se encuentre una definición absoluta. Sin embargo según [7] se pueden describir las características más representativas, como son:

1. Están infinitamente detallados, esto es, tiene detalles que se conservan en escalas arbitrariamente pequeñas cuando se hacen acercamientos progresivos.

2. Estos no pueden ser descritos en términos de la geometría clásica porque sus formas son muy irregulares.

3. Estos tiene algunos grados de auto-semejanza[4] (Aunque no siempre pues hay varios tipos de fractales).

4. La dimensión de un fractal es usualmente más grande que su dimensión topológica.

5. Usualmente, un fractal puede ser descrito de una manera recursiva y otros de una simple forma.

A continuación se van a mostrar ciertas propiedades con la ayuda de algunos ejemplos para tratar de describir que es exactamente un fractal. Por lo general para construir una forma fractal se comienza con un conjunto base y se aplica una transformación; a ese conjunto. El conjunto base $\boldsymbol{E_0}$ es llamado el iniciador. La primera transformación del conjunto $\boldsymbol{E_1}$, es llamado el generador y las **n** transformaciones del conjunto son llamadas $\boldsymbol{E_n}$. El límite del conjunto cuando este tiende a infinito es el fractal $\boldsymbol{F}$ [2]. Observemos:

[4] Auto-semejanza: En matemática es la propiedad de un objeto (llamado objeto auto similar) en el que el todo es exacta o aproximadamente similar a una parte de sí mismo [26].

Para construir el conjunto de Cantor, se empieza con un segmento de línea de longitud 1, este segmento es E_0, el iniciador. Ahora dividamos E_0 en tres partes iguales y removamos la tercera mitad de esta línea, entonces encontramos dos segmentos de igual longitud de 1/3 a ambos lados y llamamos a este conjunto el generador E_1, si repetimos el proceso a ambos segmentos, el resultado serán 4 segmentos cada uno de longitud 1/9, y llamamos a este el conjunto E_2, si repetimos el proceso infinitamente. Luego E_n tendrá $\mathbf{2^n}$ segmentos cada uno de longitud $\mathbf{3^{-n}}$. Tomando el limite cuando **n** tiende a infinito el resultado es el conjunto de Cantor conocido como "el polvo de Cantor". Este conjunto es auto-semejante y está totalmente desconectado (no hay unión entre las figuras que se forman) [7].

Figura 3. Representación del conjunto de Cantor como fractal con sus respectivas transformaciones.

"El matemático Waclaw Sierpinski[5] introdujo el triángulo de Sierpinski en 1906. El iniciador para el triángulo en este caso es un triángulo solido equilátero con lados de longitud 1. Ahora se conectan los puntos medios de cada uno de los lados para crear 4 triángulos más pequeños. Al

[5] Waclaw Sierpinski: Matemático Polaco, realizo aportes en la teoría de conjuntos, teoría de números, topología, y la teoría de funciones.

remover el triángulo central, quedaran 3 triángulos cada uno con área igual a la cuarta parte del original. Este es el generador E_1, ahora para cada uno de los triángulos, se repite el procedimiento, removiendo el triángulo central en cada uno, obteniendo 9 triángulos. Luego E_n tendrá 3^n triángulos con área 4^{-n}. Tomando el limite cuando n tiende a infinito se obtiene el triángulo de Sierpinski (fractal ***F***)" [5].

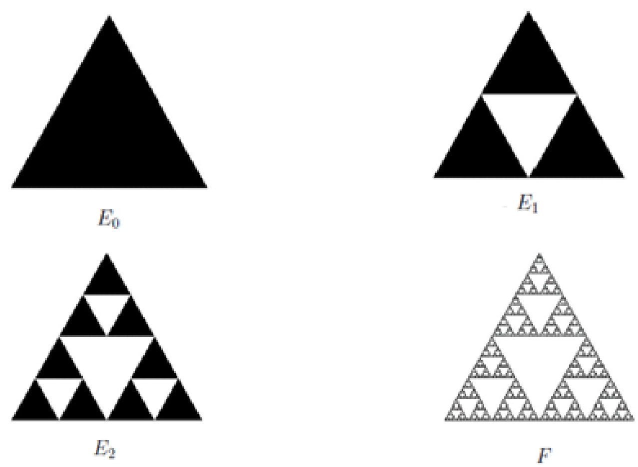


Figura 4. Fractal: Triángulo de Sierpinski

Otra noción de fractal es aquella figura que tiene un perímetro infinito, que representa otra forma para decir que la figura es infinitamente detallada [16], dependiendo de su representación tienen ya sea área o volumen finitos con tendencia a cero. Si realizamos un acercamiento a una parte de la figura, esta mostrará que tiene la misma cantidad de detalles, o formas, no importa que tanto se realice un acercamiento a la misma.

Se han visto algunos ejemplos de fractales que se pueden construir de forma geométrica, sin embargo, estos no son los únicos fractales que existen. También pueden generarse a partir del caos [15]. "Por ejemplo, un diagrama de bifurcación que es esencialmente la gráfica de una función caótica" [6].

En el diseño de la unidad didáctica se propone construir el fractal de Cantor, el triángulo de Sierpinski, el Tapete de Sierpinski y la esponja de Menger, además se presentan otro tipo de fractales naturales y geométricos que ayudan a ilustrar el concepto.

2.4.1 Dimensión Fractal

La concepción de dimensión en matemática es uno de los factores que permite el estudio y la comprensión de otros objetos matemáticos, la dificultad radica algunas veces en que es un concepto bastante abstracto y podría tener varias significaciones dependiendo del punto de vista o la disciplina en el que se use. Por ejemplo, en matemática, la cuarta dimensión aparece asociada a espacios euclídeos de más de tres dimensiones, pero si hablamos de 4 dimensiones en física aparecen conceptos como el tiempo que es una teoría más difícil de concebir.

Según [17] otras definiciones de dimensión son: “La dimensión se refiere al grado de libertad de movimiento de un objeto en un espacio determinado. Se entiende esta libertad como el número de direcciones ortogonales diferentes que se pueden tomar. De hecho, en la geometría euclidiana las únicas dimensiones posibles son las que corresponden a los números enteros: 0, 1, 2 y 3. Otra forma de definir la dimensión, es con la cantidad de coordenadas necesarias para determinar un objeto en el espacio, así mismo, se define como el número de direcciones ortogonales diferentes que se puedan tomar. En álgebra lineal, se usa un concepto de dimensión más abstracto como es el número de vectores de la base; a menudo se utilizan espacios con cuatro o incluso con un número infinito de dimensiones”.

Según la geometría euclidiana una línea es de dimensión uno, un cuadrado es de dimensión dos, y un cubo es de dimensión 3, pero qué pasaría si esta no tuviera una forma regular como por ejemplo, una nube, un caracol o un helecho, ¿Que dimensión tendrían? Según lo anterior se discutirán dos clases de dimensión, a saber. La dimensión topológica y la dimensión fractal. La dimensión topológica es nuestra forma habitual de pensar acerca de la dimensión, según Henri Poincaré[6] podemos encontrar diferentes tipos de dimensiones topológicas, así:

Tabla 1

Dimensiones topológicas

Conjunto Vacío	Dimensión -1
Punto	Dimensión 0
Segmento	Dimensión 1
Cuadrado	Dimensión 2
Cubo	Dimensión 3

Una definición distinta de dimensión topológica es la definición por semejanza, llamada también de auto-semejanza, la cual se utilizará en el presente trabajo, fue sugerida por Felix Hausdorff[7] en 1919, y readaptada posteriormente por Besicovich[8] (dimensión de Hausdorff-Besicovich).

La dimensión de Hausdorff explicada mas abajo es una medida de la complejidad y rugosidad del cuerpo, y nos da una idea de su extensión real en el espacio [24], en otras palabras cuantifica hasta qué punto el objeto cubre el espacio en el que se encuentra inscrito. La demostración y ejemplos a continuación fueron tomados de [22], ya que permiten explicar el método sobre el cual se enseña el concepto de dimensión fractal en la presente investigación.

[6] Henri Poincaré (1854-1912): Prestigioso matemático Francés, estableció el grupo fundamental de un espacio topológico en 1894.
[7] Felix Hausdorff (1868-1942): Matemático Alemán fundador de la topología moderna, introdujo conceptos fundamentales para el estudio de la teoría fractal.
[8] Abram Samoilovitch Besicovitch (1891-1970): Matemático Ruso, trabajo principalmente en métodos combinatorios y cuestiones de análisis real tal como el problema de la aguja de Kakeya y la dimensión Hausdorff-Besicovitch.

Si al obtener desde un ente *H*, *N* entes iguales, semejantes al original, con razón de semejanza *r*, entonces la dimensión topológica de *H* es el número real *D* que verifica:

$$N.r^{D} = 1 \tag{1}$$

de donde podemos obtener D, usando la función logaritmo en ambos lados de la igualdad:

$$D = \frac{Ln\ N}{Ln\ \frac{1}{r}} \tag{2}$$

donde:

D = Dimensión de Hausdorff. N = Número de copias de sí mismo.

r = Razón de homotecia (razón de auto-similitud).

Vemos que existe una relación entre la razón de homotecia, la dimensión topológica y el número de copias. Así, conociendo cuántas copias de sí mismo posee un objeto, y cuál es su razón de homotecia o razón de similitud, podremos hallar su dimensión, y si esta es mayor que su dimensión topológica, podremos clasificarlo como un objeto fractal [21].

La ecuación (1) se puede justificar desde la teoría de la medida, como veremos a continuación. La medida de la unión de *N* figuras que no se solapan A_1, A_2,..., A_n; es la suma algebraica de sus medidas:

$$m(unión) = \sum_{k=1}^{N} m(A_k) \tag{3}$$

Si una figura *A* es semejante a otra figura *A’*, con razón de semejanza *r*, la medida de *A* es proporcional a la medida de *A’*, siendo la constante de proporcionalidad una potencia de la razón de semejanza.

$$m(A) = \left(\frac{1}{r}\right)^{D} .m(A') \tag{4}$$

Veamos cómo obtener la definición de Hausdorff-Besicovich mediante la medición de un segmento *AB* del que se obtienen *N* sub-segmentos iguales, cuya razón de semejanza con *AB* es *r*, despreciando el resto del segmento. La medida total del segmento *AB* es la suma de la medida de todos los sub-segmentos iguales:

$$m(AB) = \sum_{k=1}^{N} m(S_k) = N.m(S_1) \tag{5}$$

Por otra parte:

$$m(AB) = \left(\frac{1}{r}\right)^D . m(S_1) \tag{6}$$

de donde, identificando:

$$N = \left(\frac{1}{r}\right)^D \Rightarrow N.r^D = 1 \qquad \blacksquare$$

El exponente *D* es, pues, lo que Husdorff-Besicovich llama dimensión de auto-semejanza. Veamos algunos ejemplos elementales.

1) Un segmento:

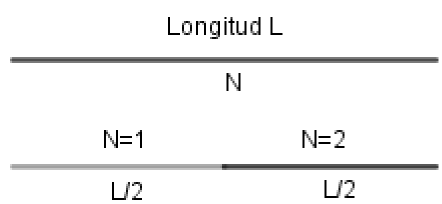


Figura 5. Dimensión de un segmento usando el principio de auto-semejanza.

Lo dividimos, por ejemplo, en dos partes iguales. *N = 2, r = ½*. Se tiene:

$$D = \frac{Ln\,N}{Ln\,\frac{1}{r}} = \frac{Ln\,2}{Ln\,2} = 1,$$ Dimensión de auto-semejanza: *D = 1*.

2) Un cuadrado:

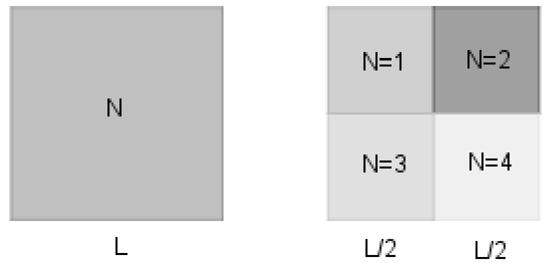


Figura 6. Dimensión de un cuadrado usando el principio de auto-semejanza.

Lo dividimos, por ejemplo, en 4 cuadrados iguales. *N = 4. r = ½.* Se tiene:

$$D = \frac{Ln\,N}{Ln\,\frac{1}{r}} = \frac{Ln\,4}{Ln\,2} = 2,$$ Dimensión de auto-semejanza: *D = 2.*

3) Un cubo:

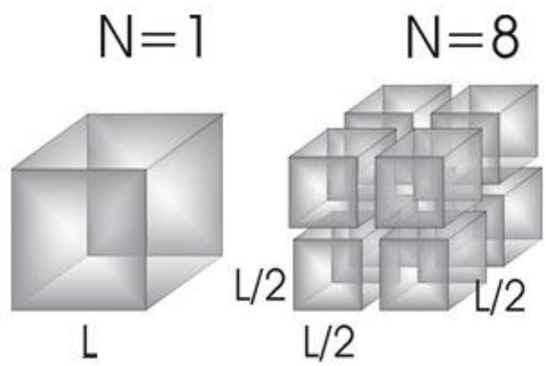


Figura 7. Dimensión de un cubo usando el principio de auto-semejanza.

Lo dividimos, por ejemplo, en 8 cubos iguales. *N = 8. r = ½.* Se tiene:

$$D = \frac{Ln\,N}{Ln\,\frac{1}{r}} = \frac{Ln\,8}{Ln\,2} = 3,$$ Dimensión de auto-semejanza: *D = 3.*

La dimensión topológica en el sentido de Poincaré coincide en general con la dimensión por semejanza de Hausdorff-Besicovich. Pero en el caso de los fractales esto no ocurre, veamos cómo se calcula la dimensión de algunos fractales mediante el principio de auto-semejanza.

4) Observemos el conjunto de Cantor.

En un intervalo de números reales, del cual se obtienen dos intervalos semejantes dividiendo el intervalo inicial en tres partes iguales. Se elimina la parte central, con lo que aparecen dos intervalos semejantes al primero, con razón de semejanza *1/3*. Es decir, $N = 2, r = 1/3$. La iteración al infinito del proceso permite reducir a polvo el intervalo generador (polvo de Cantor).

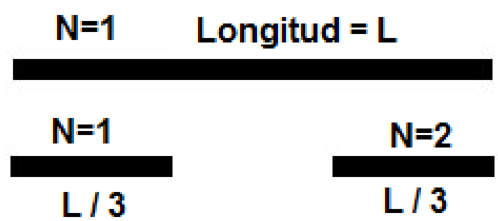


Figura 8. Dimensión del conjunto de cantor usando el principio de auto-semejanza.

La dimensión fractal es:

$$D = \frac{Ln\ N}{Ln\ \frac{1}{r}} = \frac{Ln\ 2}{Ln\ 3} = 0{,}630905$$

5) El triángulo de Sierpinski.

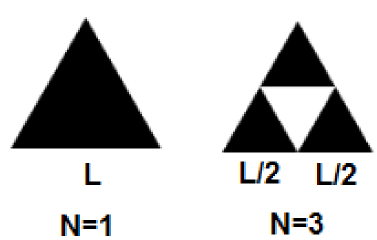


Figura 9. Dimensión del triángulo de Sierpinski usando el principio de auto-semejanza.

Con $N = 3$, $r = ½$. Su dimensión fractal es:

$$D = \frac{Ln\ N}{Ln\ \frac{1}{r}} = \frac{Ln\ 3}{Ln\ 2} = 1{,}5849$$

2.4.2 Fractales y GeoGebra

Como se pudo mostrar anteriormente mediante un estudio teórico de las dimensiones de diferentes elementos geométricos, la dimensión de los fractales no son generalmente enteras por lo que se hace casi que necesario buscar diferentes opciones para enseñar el concepto de dimensión fractal usando el principio de auto-semejanza con GeoGebra, esta investigación es una alternativa más para intentar lograr ese cometido.

Existen muchos programas informáticos que son capaces de generar estas imágenes, incluso algunos online; podríamos nombrar a Visual Basic como lo explica [24] en el último capítulo del libro donde propone mediante una programación sencilla realizar la representación de cierto tipo de fractales, pero hay algunas características de GeoGebra que lo hacen especial para desarrollar este ideal.

"Primero, que se trata de un software libre y llevado adelante por una comunidad de técnicos y educadores en matemática pensado especialmente para el ámbito del aula. No está concebido ni para el ingeniero, ni para el matemático puro (aunque se podría utilizar), está concebido para el estudiante que aprende matemática.

Segundo, que nos ofrece la posibilidad de visualizar simultáneamente un mismo objeto en varios registros de representación. En nuestro caso, será esencial poder asociar un punto del plano, al número complejo correspondiente. A esto se suma la potencialidad gráfica del programa del mismo.

Tercero, que nos ofrece una planilla de cálculo integrada en la que será muy práctico realizar las iteraciones de la función generatriz del fractal.

Se encuentran algunas limitaciones, que tendremos que subsanar de la mejor manera. Una de ellas puede ser que el algoritmo que utilizaremos para crear las imágenes será quizás demasiado exigente para el programa (o el equipo en el que funcione). O también, que tendremos que crear hábilmente algunas herramientas específicas para que el software realice lo que necesitamos pero estas dificultades se pueden sobrepasar” [25].

GeoGebra por ende es uno de los medios tecnológicos que propicia la adquisición del conocimiento sobre el concepto de dimensión fractal usando el principio de auto-semejanza, y además permite la interactividad entre los propios estudiantes y el profesor.

Capítulo 3

Diseño Metodológico

Se realizó un estudio de tipo cuantitativo, suponiendo una hipótesis nula H0 (La investigación no potencia el aprendizaje del concepto de dimensión fractal) y una hipótesis alterna H1 (La investigación si potencia el aprendizaje del concepto de dimensión fractal).

Seguidamente se diseñó y aplicó un cuestionario que permitió obtener los desempeños iniciales de referencia y luego de aplicada la unidad didáctica se obtuvo un desempeño final permitiendo así realizar un contraste en el aprendizaje individual y grupal, todo lo anterior con el fin de potenciar la construcción teoría, el aprendizaje colaborativo y el acercamiento a conceptos como dimensión fractal entre otros.

“Al análisis cuantitativo se le dio un enfoque explicativo, pretendiendo a partir de los datos obtenidos describir y explicar los cambios logrados en el aprendizaje de la totalidad de los estudiantes con los que se trabajó en la investigación” [9].

La investigación se realizó con 42 estudiantes de grado Octavo de la Institución Educativa Nuestra Señora de Guadalupe en la ciudad de Dosquebradas, con edades que oscilan entre 12 y 15 años de edad. El estrato socio-económico se sitúa entre 2 y 3, el grupo está conformado por 17 niños y 25 niñas, quienes fueron los elementos de trabajo. Al ser un diseño cuasi experimental, la muestra fue intencional, no probabilística [12].

Como componente de estudio se asumió el aprendizaje colaborativo en el acercamiento del estudiante al concepto de dimensión fractal usando el principio de auto-semejanza con GeoGebra y la incidencia que tenía en él una unidad didáctica centrada en la teoría didáctica de Guy Brousseau.

La presente investigación se dividió en tres etapas:

I. La etapa de planificación.

II. La etapa de trabajo de campo y recolección de información.

III. La etapa de análisis e interpretación de los datos.

I. Etapa de planificación:

Se realizó una búsqueda de investigaciones relacionadas con el objeto de estudio, enseñanza del concepto de dimensión fractal usando el principio de auto-semejanza con GeoGebra, estas se presentaron en los antecedentes investigativos internacionales, nacionales y regionales, utilizando fuentes y fichas bibliográficas. Luego el trabajo se centró en la elaboración del ámbito problémico, los objetivos, el marco teórico, el diseño metodológico y los instrumentos de recolección de la información.

Para la validación de los instrumentos se realizó una revisión de los instrumentos por parte del tutor del proyecto investigativo, seguido de una prueba piloto a un grupo de estudiantes diferentes a los de la investigación de la básica media en la I.E Nuestra Señora de Guadalupe; este pilotaje también se realizó con compañeros de la maestría en enseñanza de la matemática, y al juicio de un experto en el área.

II. Etapa de trabajo de campo y recolección de información:

En segunda instancia se aplicaron las técnicas e instrumentos para la recolección de la información con los estudiantes de octavo grado de la institución educativa Nuestra Señora de Guadalupe de Dosquebradas Rda. Como fueron:

- Un cuestionario con preguntas abiertas y de selección múltiple con única respuesta (ver anexo A) que usa al inicio y al final del estudio. Las preguntas planteadas en este cuestionario, fueron cuidadosamente elaboradas por el investigador y validadas como se mencionó anteriormente.

- Una observación no participante de las clases, realizada por medio de fotografías (ver anexo D).

- Las producciones en el ambiente virtual de aprendizaje y/o textuales que realizaron los estudiantes en el desarrollo de las actividades de la unidad didáctica (ver anexo E).

- “Ayudas ajustadas por parte del docente, las cuales consistieron en realizar una retroalimentación de los cuestionarios y guías de actividad desarrolladas en cada una de las sesiones de la unidad didáctica” [9].

III. Etapa de análisis e interpretación de datos

En la etapa final se realizó un análisis cuantitativo. Para este análisis, la información se obtuvo aplicando un cuestionario a 42 estudiantes que hicieron parte del estudio. El instrumento utilizado fue el mismo en el momento inicial y final luego haberse aplicado la unidad didáctica. Luego esta información se transcribió en la *tabla 2*, exhibida a continuación, y se le dio una valoración a la información recogida de acuerdo con los criterios establecidos (ver anexo A), según el enfoque socio constructivista, la teoría de aprendizaje colaborativa y la teoría didáctica aplicada. Los criterios para la escala de valoración que aparecen en esta tabla fueron validados por expertos en el tema y por profesores de la Maestría en enseñanza de la matemática de la Universidad Tecnológica de Pereira (2017).

Tabla 2

Rejilla de valoración para registrar el resultado del cuestionario inicial y final. [9]

ESTUDIANTE	*NOMBRES Y APELLIDOS*	*PREGUNTA*	*OPCIÓN ESCOGIDA*	*VALORA-CIÓN*	*DESCRIPCIÓN DE LA OPCIÓN ESCOGIDA*	*VALORA-CIÓN TOTAL*	*NIVEL*	*DESCRIPCIÓN DE LA VALORACIÓN*
		1						
		1.1						
		1.2						
		2						
		2.1						
		3						
		3.1						
		3.2						
		4						
		4.1						
		5						

Luego la información recolectada se analizó con la ayuda de gráficos y algunas medidas de tendencia central para identificar el nivel inicial de cada estudiante de acuerdo con las descripciones de la *tabla 4*, que se muestra más adelante, obteniendo una estado inicial del aprendizaje del grupo; de igual forma se analizaron los resultados del cuestionario final.

Finalmente, se contrastaron los resultados obtenidos entre el cuestionario inicial y final para determinar si hubo cambios o no en el aprendizaje de los estudiantes respecto al concepto de dimensión fractal usando el principio de auto-semejanza con GeoGebra al aplicar la unidad didáctica.

Capítulo 4

Resultados Obtenidos

A continuación se muestra el cronograma donde aparecen discriminados los tiempos de aplicación de los diferentes instrumentos en la presente investigación.

4.1 Interpretación y análisis de resultados

Tabla 3

Cronograma de aplicación de la unidad didáctica además del cuestionario inicial y final.

FECHA DE APLICACIÓN	INSTRUMENTO	NÚMERO DE ESTUDIANTES	DURACIÓN (HORAS)	OBSERVACIÓN
Segunda semana de Julio	Cuestionario Inicial (anexo A)	42	1 hora	Referente inicial para desarrollar el presente estudio
Tercer semana de Julio	Sesión #1 (anexo B)	40	2 horas	Los estudiantes faltantes se nivelaron en otro espacio
Cuarta semana de Julio	Sesión #2 (anexo B)	42	2 horas	
Primer semana de Agosto	Sesión #3 (anexo B)	40	2 horas	Los estudiantes faltantes se nivelaron en otro espacio
Segunda semana de Agosto	Sesión #4 (anexo B)	42	2 horas	
Primer Semana de Septiembre	Cuestionario Final (anexo A)	42	1 hora	Luego de aplicar la unidad didáctica pasaron 3 semanas antes de aplicar el cuestionario final
Total			10 horas	

Como se puede observar en la tabla anterior entre la aplicación del cuestionario inicial y final transcurrió un tiempo aproximado de dos meses, para evitar en los estudiantes que recordaran el cuestionario inicial, debido a que se usó el mismo cuestionario en ambas etapas, y para deducir de esta manera si se logró un aprendizaje colaborativo sobre el concepto de dimensión fractal utilizando el principio de auto-semejanza con ayuda de GeoGebra aplicando la teoría didáctica de Guy Brousseau y el enfoque socio constructivista.

Para este proceso se recogieron y analizaron los datos tomando como variable dependiente el aprendizaje colaborativo sobre el concepto de dimensión fractal usando el principio de auto-semejanza con GeoGebra y como incidió la unidad didáctica (variable independiente) basada en la teoría didáctica de Guy Brousseau. Procurando demostrar que al aplicar la unidad didáctica esta incide progresivamente para mejorar el aprendizaje en los estudiantes, en este caso de grado 8 de la I.E nuestra señora de Guadalupe de Dosquebradas Rda.

Así, el análisis y la interpretación de los resultados del presente trabajo se pueden clasificar en tres momentos:

I. Cuestionario Inicial.

II. Unidad Didáctica

III. Cuestionario Final.

I. Cuestionario Inicial. Aquí se presentan los resultados y el análisis estadístico realizado en Excel del cuestionario inicial, como punto de partida del trabajo (ver anexo C). En la figura 5 aparece el promedio y los resultados individuales obtenidos del cuestionario inicial aplicado a los 42 estudiantes de grado 8.

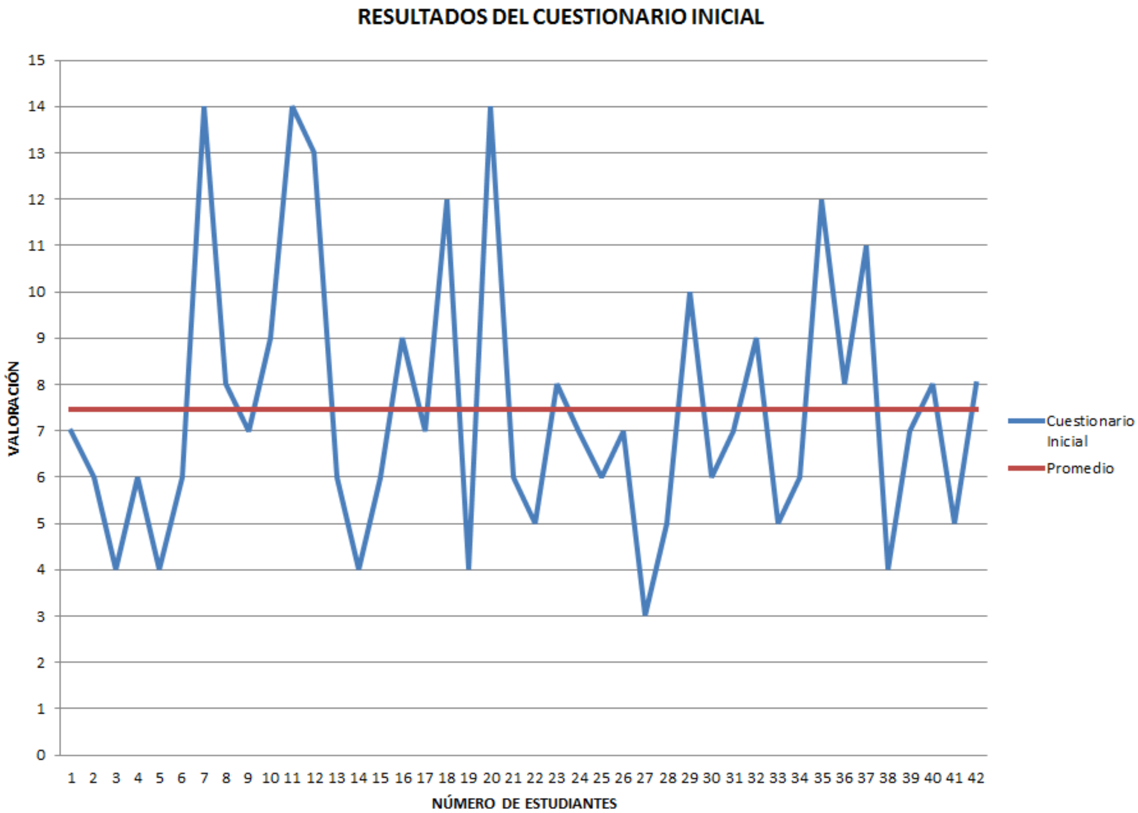


Figura 10. Resultados del cuestionario inicial.

Luego de recolectar y analizar la información del cuestionario inicial (ver anexo C). Se puede observar que el grupo tuvo un promedio de 7.5 puntos, además revisando los resultados individuales; 24 estudiantes equivalente al 57.14% están por debajo de la media. Por otro lado, sobre la media hay 18 estudiantes que representan el 42.86 % del grupo, encontrándose solo 8 estudiantes en nivel medio. La media obtenida del grupo se ubica dentro de un nivel de desempeño bajo según la tabla 4, como se muestra a continuación:

Tabla 4

Parámetros de valoración de los estudiantes en la presente investigación por niveles.

NIVEL	PUNTAJE O RANGO	CARACTERÍSTICAS
ALTO	17 – 22	✓ En general presenta ideas acordes y explica de forma adecuada sustentando sus respuestas. ✓ Identifica al presentarle imágenes cuales son y no son fractales explicando el porqué. ✓ Identifica el concepto de dimensión y lo explica. ✓ Dibuja una forma fractal y una no fractal. ✓ Identifica algunas características básicas de una forma fractal (dimensión fractal, auto-semejanza), y sustenta en qué consisten. ✓ Muestra una evolución conceptual sobre dimensión fractal.
MEDIO	10 – 16	✓ En general presenta algunas ideas acordes, o explica de forma superficial tratando de sustentar sus respuestas. ✓ Identifica al presentarle imágenes cuales no son fractales y no sustenta. ✓ Identifica el concepto de dimensión pero no explica ✓ Dibuja solo una forma fractal o una no fractal. ✓ Identifica algunas características básicas de una forma fractal (dimensión fractal, auto-semejanza), pero no sustenta en qué consisten.
BAJO	0 – 9	✓ No demuestra ideas acordes, no sustenta sus respuestas o usa distractores. ✓ No identifica características en imágenes como por ejemplo fractales. ✓ No comprende el concepto de dimensión o lo comprende de forma errónea. ✓ No dibuja o dibuja de forma equivoca una forma fractal y una no fractal. ✓ No identifica características básicas de una forma fractal (dimensión fractal, auto-semejanza)

Considerando los parámetros de valoración de la tabla anterior, luego de evaluar todos los cuestionarios (ver anexo C) los estudiantes se distribuyeron en solo 2 niveles como lo presenta la siguiente tabla.

Tabla 5

Distribución de los estudiantes de Octavo en los diferentes niveles según la valoración del cuestionario inicial.

NIVEL	RANGO DE PUNTUACIÓN	NÚMERO DE ESTUDIANTES	PORCENTAJE
BAJO	0 – 9	34	81%
MEDIO	10 – 16	8	19%
ALTO	17 – 22	0	0%

Según la tabla anterior y observando la siguiente figura podemos extractar que 34 estudiantes (81%), están en un nivel bajo y solo 8 estudiantes (19%), están en nivel medio, esto es apenas normal ya que dentro del currículo propuesto por el Ministerio de Educación Nacional, los contenidos sobre geometría fractal no aparecen.

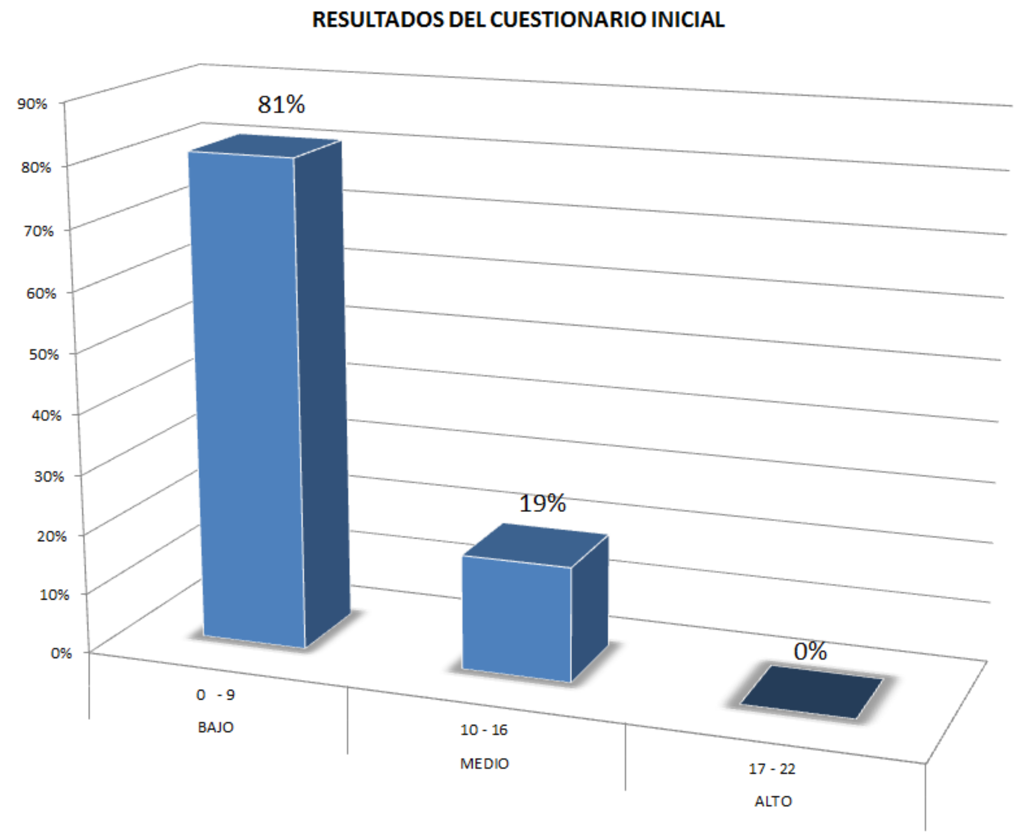


Figura 11. Histograma con los niveles de valoración de los estudiantes de grado 8 en el cuestionario inicial.

Si nos remitiéramos a las pruebas SABER de matemática en la media, el componente geométrico nos daríamos cuenta que los resultados a nivel histórico son bastante bajos igual a los encontrados aquí, debido a que en muchos colegios la geometría se enseña desde un punto de vista euclidiano y en otros ni siquiera se enseña o se deja como temario para los últimos días de clase.

II. Unidad didáctica: Esta se desarrolló durante 4 sesiones de 2 horas, realizadas entre el 12 de Julio de 2017 al 4 de Septiembre de 2017 (ver anexos A al E). Se diseñó teniendo en cuenta las fases de la teoría didáctica de Guy Brousseau y el aprendizaje colaborativo, por lo cual se proponen actividades que se trabajan de forma grupal, además se hizo con el enfoque socio constructivista utilizando como herramienta de mediación principal GeoGebra, entre otras (videos sobre el tema y material didáctico). Luego de aplicar el cuestionario inicial se realizó la intervención didáctica con guías de actividades como se discrimina a continuación:

- Sesión #1: ¿Qué sabemos de las dimensiones del universo y que es una escala? Fue una sesión diseñada para explorar y hacer la introducción al tema, propiciando el andamiaje básico para el tema.

- Sesión #2: ¿Qué es un fractal? ¿Cuál es la dimensión del polvo de Cantor? La idea fue introducir nuevos conceptos, como fractal, y la forma de construcción de un fractal.

- Sesión #3: ¿Cuál es la dimensión del triángulo de Sierpiński? Ya con los nuevos conceptos inducidos se buscó explorar un fractal en particular, visualizar sus características y a partir de allí dibujar una forma fractal con estos elementos.

- Sesión #4: ¿Qué es la esponja de Menger y cuál es su dimensión? Esta sesión pretende relacionar aparte de los conceptos ya trabajados, fractales en torno a la segunda y tercera dimensión con una construcción similar.

Tres semanas después de aplicar la unidad didáctica se aplicó el cuestionario final para evaluar las fortalezas y debilidades de los estudiantes.

III. Cuestionario final: Se realizó la comparación con el cuestionario inicial, para observar como influyó la unidad didáctica al utilizar el aprendizaje colaborativo en la presente investigación (ver anexo C). En la figura 7 se muestran los resultados del cuestionario final presentado por los 42 estudiantes que hicieron parte del estudio.

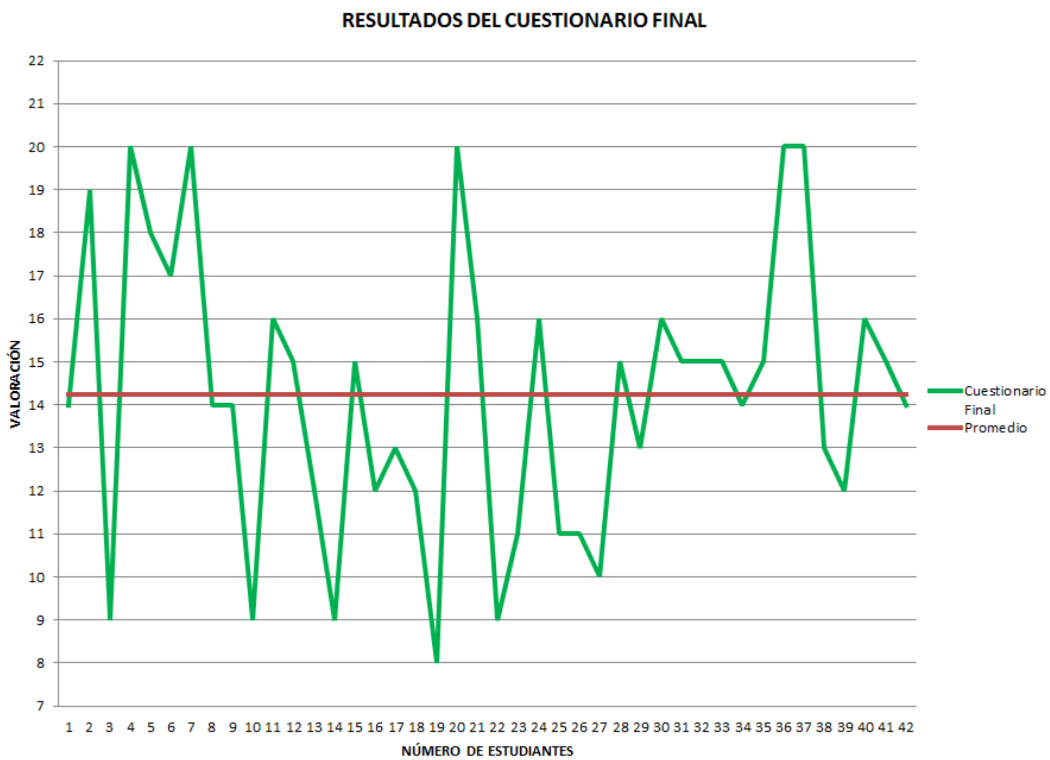


*Figura 12***.** Resultados del cuestionario final.

Al aplicar el cuestionario final se obtuvo una media de 14.2 puntos, mostrando que hay una mejoría global significativa luego de aplicar la unidad didáctica, por encima del promedio se posicionaron 21 estudiantes (50%) algunos en el nivel medio y otros en el nivel alto, como se puede observar hay pocos estudiantes que quedaron en el nivel bajo (5), esto permite dar como evidencia que hubo una aprehensión importante del concepto de dimensión fractal usando el principio de auto-semejanza con GeoGebra.Si nos remitimos a los criterios de valoración de la tabla 4, luego de evaluar todos los cuestionarios finales (ver anexo C) los estudiantes se distribuyeron en este caso en los 3 niveles como lo presenta la tabla 6.

Tabla 6

Distribución de los estudiantes de Octavo en los diferentes niveles según la valoración del cuestionario final.

NIVEL	RANGO DE PUNTUACIÓN	NÚMERO DE ESTUDIANTES	PORCENTAJE
BAJO	0 – 9	5	12%
MEDIO	10 – 16	29	69%
ALTO	17 – 22	8	19%

Se puede notar que el porcentaje de estudiantes en nivel bajo disminuyo quedando en solo 12%, y se puede resaltar que inicialmente no habían estudiantes en nivel alto pero al aplicar el cuestionario final se encontró el 19%. Ahora se van a contrastar los resultados para mostrar con mayor claridad cuál fue la evolución conceptual de cada uno de los estudiantes sujetos a estudio.

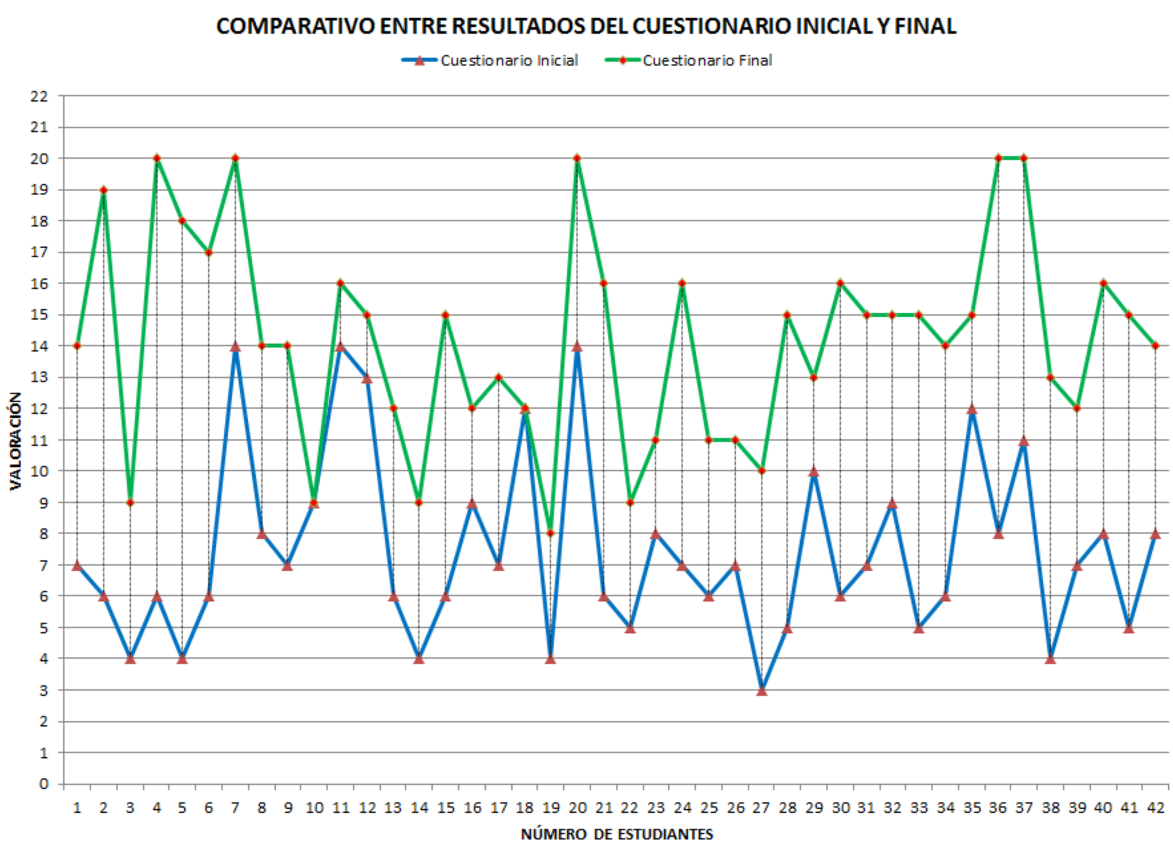


*Figura 13***.** Comparativo entre los resultados del cuestionario inicial y final.

Como se observa en la proyección de cada estudiante la mayoría obtuvo una calificación mayor a la inicial (realizando el salto de nivel en la mayoría de los casos) a excepción de los estudiantes #10 y #18 que obtuvieron el mismo resultado en ambos cuestionarios. En la tabla 7 se muestra un resumen por nivel comparando además el promedio obtenido en cada cuestionario. De forma global se logró una mejoría de 89,3% en el grupo, mostrando unos muy buenos resultados individuales y grupales, se puede observar que el promedio del cuestionario final se posiciona en el nivel medio (tabla 4) además que en cada nivel hay un cambio importante. Observemos.

Tabla 7

Cuadro comparativo de los resultados obtenidos entre el cuestionario inicial y final.

	CUESTIONARIO INICIAL	**CUESTIONARIO FINAL**	**DISCUSIÓN**
Media	7,5 (Nivel Bajo)	14,2 (Nivel Medio)	Aumento 6,7 puntos Este es el crecimiento global del grupo que es alrededor del 89,3%.
Estudiantes con desempeño bajo	34	5	Indica que 5 estudiantes se mantuvieron en nivel bajo, pero los demás pasaron a un nivel medio, mejorando de forma importante. Disminuyo 69%.
Estudiantes con desempeño medio	8	29	Indica que una cantidad importante paso del nivel bajo, al nivel medio. Aumento un 40%
Estudiantes con desempeño alto	0	8	Es satisfactorio obtener luego de la intervención didáctica una cantidad importante de estudiantes en el nivel más alto, demostrando dominio del tema. Aumento 19%

Con ayuda de la tabla anterior y de algunas ilustraciones del cuestionario inicial y final de ciertos estudiantes de cada nivel se discutirán los desempeños respectivos citando algunas preguntas. Así:

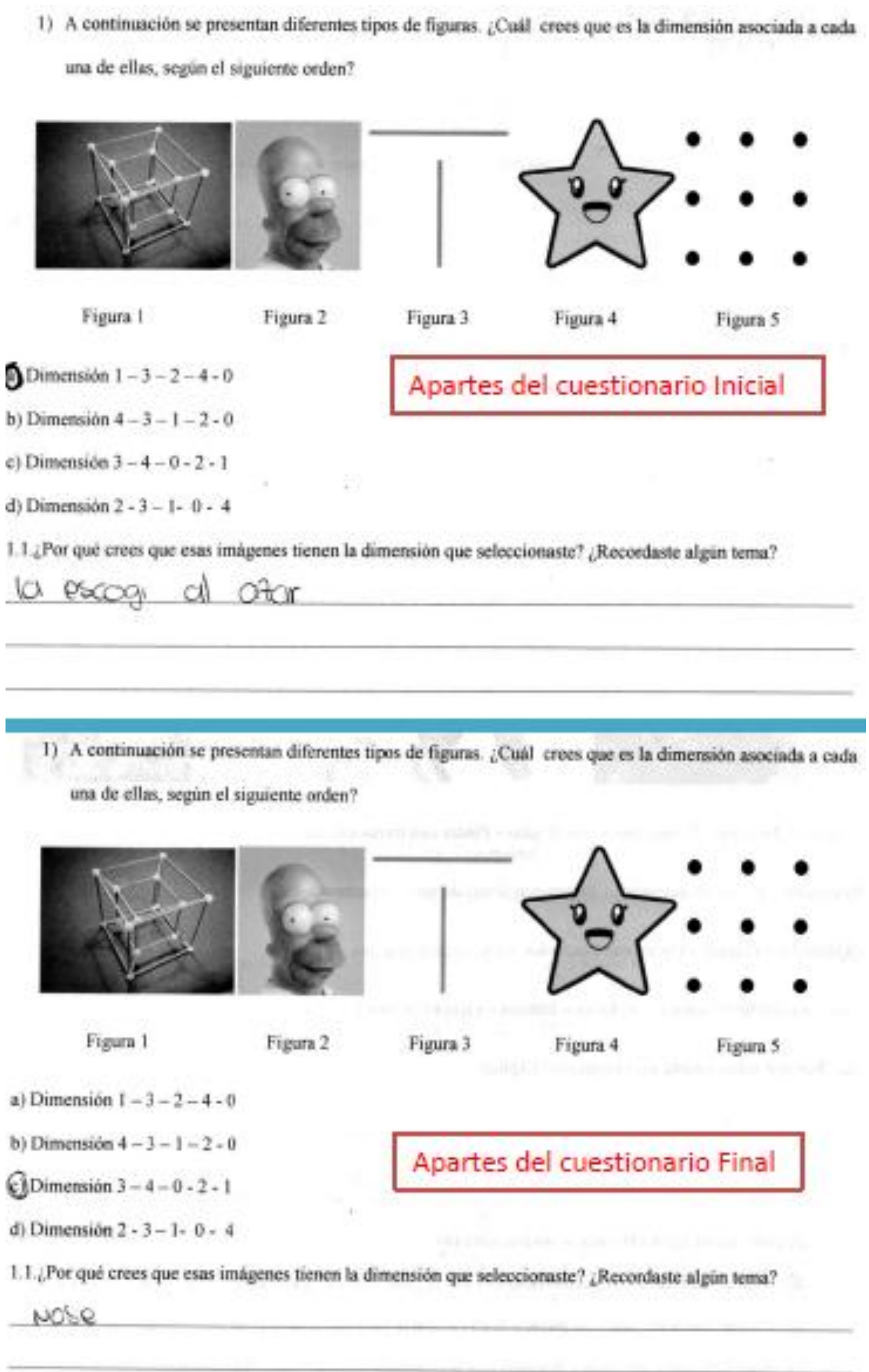
En el nivel bajo, después del cuestionario final se pudo observar que se encuentran ubicados el 12% de los estudiantes en comparación con el 81% ubicados en el cuestionario inicial, indicando que hay un 69% menos de estudiantes en este nivel, lo que evidencia las ventajas de aplicar un aprendizaje colaborativo. Como ejemplo de este nivel se tomó el estudiante N°19, cuya discusión se muestra en la tabla 8.

Tabla 8

Ejemplo de un estudiante clasificado en nivel bajo al final del estudio.

Estudiante	N° 19
Resultado Cuestionario Inicial	4
% Cuestionario Inicial	18,2%
Resultado Cuestionario Final	8
% Cuestionario Inicial	36,4%
Observaciones	En el cuestionario inicial era natural que el estudiante obtuviera unos resultados bajos ya que son temáticas que no habían sido explicadas pero luego de la aplicación de la unidad didáctica aunque su puntaje subió 4 unidades, se mantuvo en el mismo nivel (bajo), mostrando que: El estudiante no maneja la temática, no está en capacidad de distinguir características básicas de los fractales, no maneja los factores de escala y tiene confusión sobre el concepto de dimensión y dimensión fractal, por ende no está en la capacidad de sustentar sus respuestas.

A continuación se muestran algunas ilustraciones de las respuestas del estudiante #19 en el cuestionario inicial y final.



1) A continuación se presentan diferentes tipos de figuras. ¿Cuál crees que es la dimensión asociada a cada una de ellas, según el siguiente orden?

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5

a) Dimensión 1 – 3 – 2 – 4 - 0

b) Dimensión 4 – 3 – 1 – 2 - 0

c) Dimensión 3 – 4 – 0 - 2 - 1

d) Dimensión 2 - 3 – 1- 0 - 4

Apartes del cuestionario Inicial

1.1.¿Por qué crees que esas imágenes tienen la dimensión que seleccionaste? ¿Recordaste algún tema?

la escogi al azar

1) A continuación se presentan diferentes tipos de figuras. ¿Cuál crees que es la dimensión asociada a cada una de ellas, según el siguiente orden?

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5

a) Dimensión 1 – 3 – 2 – 4 - 0

b) Dimensión 4 – 3 – 1 – 2 - 0

c) Dimensión 3 – 4 – 0 - 2 - 1

d) Dimensión 2 - 3 – 1- 0 - 4

Apartes del cuestionario Final

1.1.¿Por qué crees que esas imágenes tienen la dimensión que seleccionaste? ¿Recordaste algún tema?

NOSE

*Ilustración 1***.** Imágenes de la pregunta 1 del cuestionario inicial y final del estudiante N° 19.

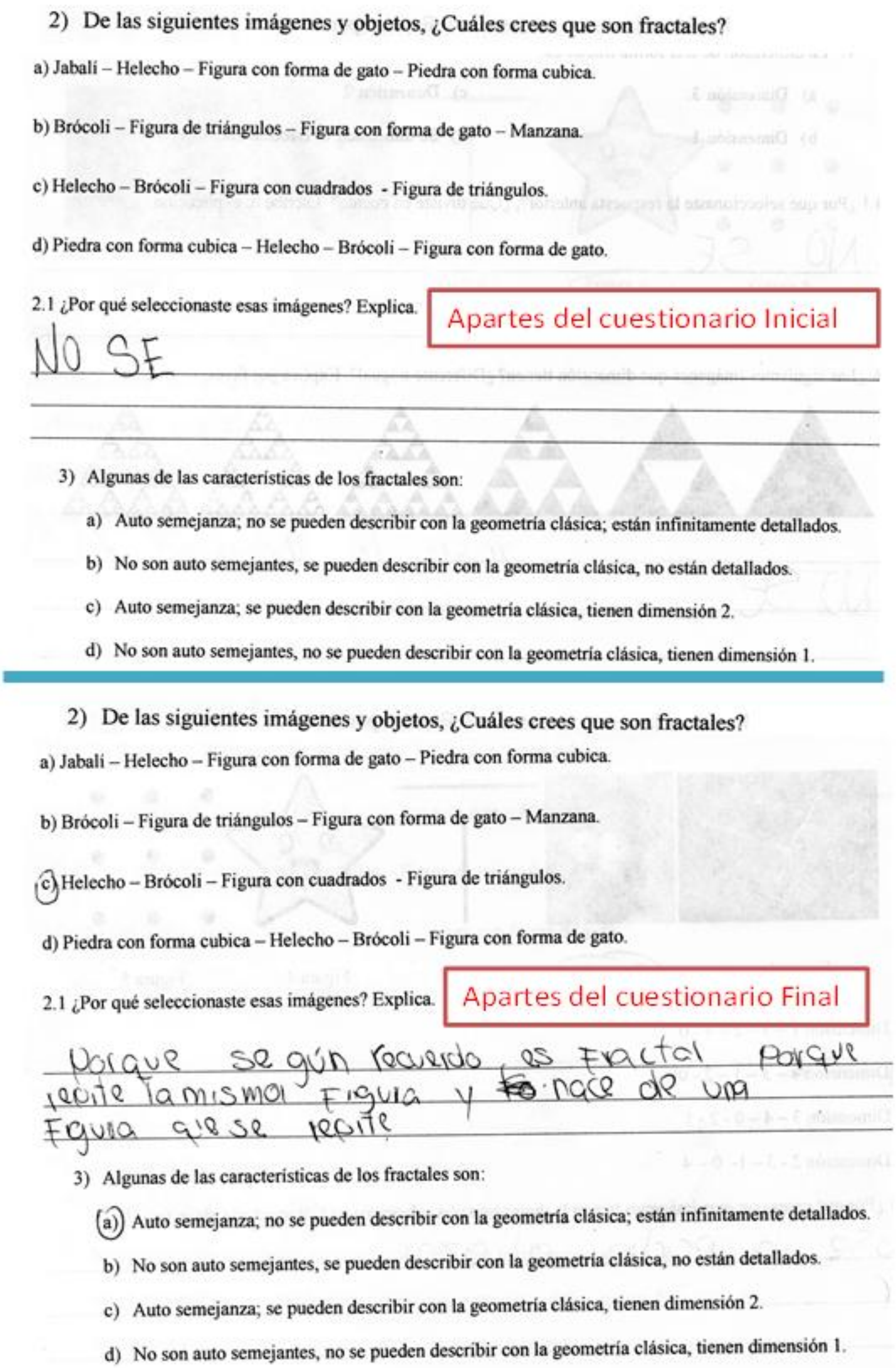
En el nivel medio, se encontraban inicialmente solo el 19% de los estudiantes, luego de realizar el cuestionario final se encuentra el 69%, un 40% pasaron del nivel bajo al medio siendo un logro bastante importante. Como ejemplo de este nivel se tomó el estudiante N°28, cuya discusión se muestra en la tabla 9.

Tabla 9

Ejemplo de un estudiante clasificado en nivel medio al final del estudio.

Estudiante	N° 28
Resultado Cuestionario Inicial	5
% Cuestionario Inicial	22,7%
Resultado Cuestionario Final	15
% Cuestionario Inicial	68,2%
Observaciones	Como ya se discutió no es sorpresa que en el cuestionario inicial obtuviera bajos resultados, luego de la intervención didáctica el puntaje subió 10 unidades, dando un salto de nivel desde bajo hasta medio, lo que significa: El estudiante maneja ciertas temáticas, distingue algunas características básicas de los fractales, maneja factores de escala e identifica conceptos como dimensión y dimensión fractal pero no los explica o los explica de forma superficial, y realiza representaciones ya sea de formas fractales o de no fractales.

A continuación se muestran algunas ilustraciones de las respuestas del estudiante #28 en el cuestionario inicial y final.



2) De las siguientes imágenes y objetos, ¿Cuáles crees que son fractales?

a) Jabalí – Helecho – Figura con forma de gato – Piedra con forma cubica.

b) Brócoli – Figura de triángulos – Figura con forma de gato – Manzana.

c) Helecho – Brócoli – Figura con cuadrados - Figura de triángulos.

d) Piedra con forma cubica – Helecho – Brócoli – Figura con forma de gato.

2.1 ¿Por qué seleccionaste esas imágenes? Explica.

Apartes del cuestionario Inicial

NO SE

3) Algunas de las características de los fractales son:

a) Auto semejanza; no se pueden describir con la geometría clásica; están infinitamente detallados.

b) No son auto semejantes, se pueden describir con la geometría clásica, no están detallados.

c) Auto semejanza; se pueden describir con la geometría clásica, tienen dimensión 2.

d) No son auto semejantes, no se pueden describir con la geometría clásica, tienen dimensión 1.

2) De las siguientes imágenes y objetos, ¿Cuáles crees que son fractales?

a) Jabalí – Helecho – Figura con forma de gato – Piedra con forma cubica.

b) Brócoli – Figura de triángulos – Figura con forma de gato – Manzana.

c) Helecho – Brócoli – Figura con cuadrados - Figura de triángulos.

d) Piedra con forma cubica – Helecho – Brócoli – Figura con forma de gato.

2.1 ¿Por qué seleccionaste esas imágenes? Explica.

Apartes del cuestionario Final

Porque según recuerdo es Fractal porque repite la misma Figura y ~~Fo~~ nace de una Figura que se repite

3) Algunas de las características de los fractales son:

a) Auto semejanza; no se pueden describir con la geometría clásica; están infinitamente detallados.

b) No son auto semejantes, se pueden describir con la geometría clásica, no están detallados.

c) Auto semejanza; se pueden describir con la geometría clásica, tienen dimensión 2.

d) No son auto semejantes, no se pueden describir con la geometría clásica, tienen dimensión 1.

*Ilustración 2***.** Imágenes de las preguntas 2 y 3 del cuestionario inicial y final del estudiante N° 28.

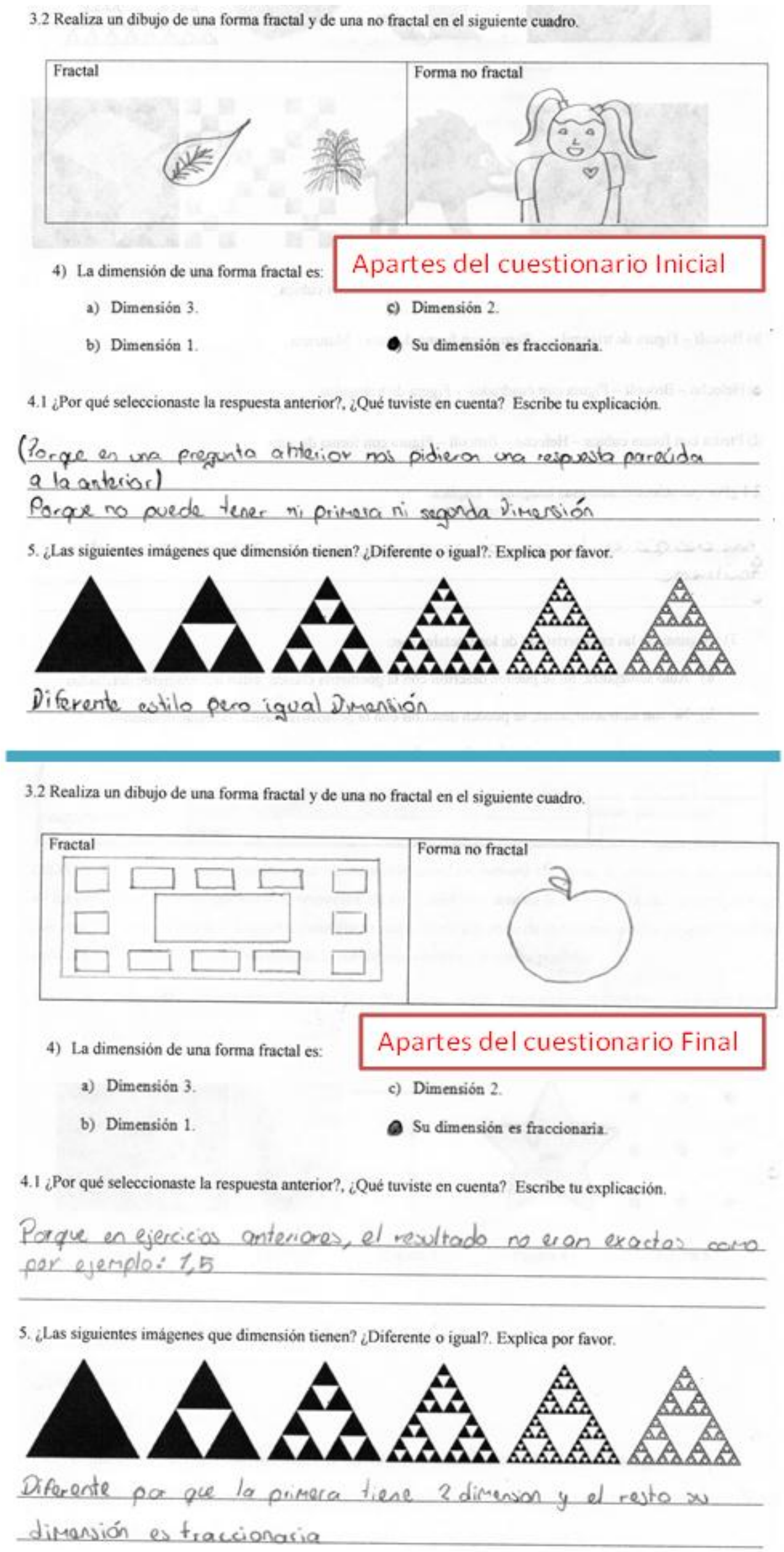
En el nivel alto, se encuentran 8 estudiantes que representan el 19% al aplicar el cuestionario final, se debe recordar que en al aplicar el cuestionario inicial no había ningún estudiante en este nivel. Como ejemplo de este nivel se tomó el estudiante N°20, cuya discusión se muestra en la tabla 10.

Tabla 10

Ejemplo de un estudiante clasificado en nivel alto al final del estudio.

Estudiante	N° 20
Resultado Cuestionario Inicial	14
% Cuestionario Inicial	63,3%
Resultado Cuestionario Final	20
% Cuestionario Inicial	90,91%
Observaciones	Este estudiante de forma sorpresiva se ubicó en el nivel medio al aplicar el cuestionario inicial, luego de la intervención didáctica el puntaje subió 6 unidades, dando un salto desde el nivel medio hasta el alto, lo que significa: El estudiante maneja la temática, distingue características básicas de los fractales, maneja factores de escala, identifica y explica conceptos como dimensión y dimensión fractal y realiza representaciones de formas fractales y no fractales.

A continuación se muestran algunas ilustraciones de las respuestas del estudiante #20 en el cuestionario inicial y final.



3.2 Realiza un dibujo de una forma fractal y de una no fractal en el siguiente cuadro.

Fractal	Forma no fractal

Apartes del cuestionario Inicial

4) La dimensión de una forma fractal es:

a) Dimensión 3.
c) Dimensión 2.
b) Dimensión 1.
● Su dimensión es fraccionaria.

4.1 ¿Por qué seleccionaste la respuesta anterior?, ¿Qué tuviste en cuenta? Escribe tu explicación.

(Porque en una pregunta anterior nos pidieron una respuesta parecida a la anterior)
Porque no puede tener ni primera ni segunda Dimensión

5. ¿Las siguientes imágenes que dimensión tienen? ¿Diferente o igual?. Explica por favor.

Diferente estilo pero igual Dimensión

3.2 Realiza un dibujo de una forma fractal y de una no fractal en el siguiente cuadro.

Fractal	Forma no fractal

Apartes del cuestionario Final

4) La dimensión de una forma fractal es:

a) Dimensión 3.
c) Dimensión 2.
b) Dimensión 1.
● Su dimensión es fraccionaria.

4.1 ¿Por qué seleccionaste la respuesta anterior?, ¿Qué tuviste en cuenta? Escribe tu explicación.

Porque en ejercicios anteriores, el resultado no eran exactos como por ejemplo: 1,5

5. ¿Las siguientes imágenes que dimensión tienen? ¿Diferente o igual?. Explica por favor.

Diferente por que la primera tiene 2 dimensión y el resto su dimensión es fraccionaria

*Ilustración 3***.** Imágenes de las preguntas 3.2, 4 y 5 del cuestionario inicial y final del estudiante N° 20.

Ahora se analizaran las preguntas por separado para analizar, cuál fue su comportamiento porcentual. En la tabla 11 aparece el resumen de resultados generales de los estudiantes en el cuestionario inicial y final por pregunta.

Tabla 11

Comparación del puntaje obtenido en cada pregunta por el grupo en el cuestionario inicial y final.

Número de Pregunta	Puntaje Alcanzado por el grupo Cuestionario Inicial	Puntaje Alcanzado por el grupo Cuestionario Final	Puntaje Máximo posible por pregunta	Porcentaje alcanzado por el grupo Cuestionario Inicial	Porcentaje alcanzado por el grupo Cuestionario Final
Pregunta 1	19	34	42	45,2%	81,0%
Pregunta 1.1	50	61	126	39,7%	48,4%
Pregunta 2	11	33	42	26,2%	78,6%
Pregunta 2.1	50	70	126	39,7%	55,6%
Pregunta 3	4	32	42	9,5%	76,2%
Pregunta 3.1	36	88	126	28,6%	69,8%
Pregunta 3.2	40	99	126	31,7%	78,6%
Pregunta 4	9	40	42	21,4%	95,2%
Pregunta 4.1	49	82	126	38,9%	65,1%
Pregunta 5	45	59	126	35,7%	46,8%
Total Grupo	313	598	924	33,9%	64,7%

Se puede notar que en todas las preguntas el grupo mejoró de forma marcada como se ve en la pregunta 1, 2, 3, y 4, donde los porcentajes se incrementaron significativamente. Por otro lado hubo otras preguntas que aunque aumentaron, su incremento no fue muy marcado, por ejemplo:

En las preguntas 1.1, 2.1 y 5, se nota que hubo mayor dificultad. La característica principal de estas preguntas, es que se pedía sustentar las respuestas y esto es algo que les da un mayor trabajo a los estudiantes en general, por otro lado se puede observar que el puntaje inicial del grupo fue de 313 (33.9%) y al aplicar la unidad didáctica fue de 598 (64,7%) potenciando el grupo un 30.8% con respecto a su desempeño inicial.

Con base en lo expuesto anteriormente se nota la importancia de diseñar e implementar unidades didácticas especialmente a la hora de enseñar matemática, y en lo posible usar diferentes tipos de recursos y representaciones para que se puedan enseñar los conceptos desde diferentes frentes (analítica, gráfica, etc.) y en lo posible mediados por algún medio tecnológico. Generalmente el aprendizaje colaborativo permite sobrepasar las dificultades a la hora de aprender, ya que hay interacción entre los mismos estudiantes con el fin de cumplir un objetivo en común.

Es importante tener claro la teoría didáctica de la matemática que se aplica para diseñar la unidad didáctica e ir aplicando en cada fase lo que se quiere hacer con los estudiantes ya que que permite manejar de forma adecuada los tiempos en cada actividad para optimizarlo en clase, como se realizó con los 42 estudiantes del presente estudio donde el tiempo jugo un papel importante debido a que se desarrolló en sus clases de matemática. Finalmente, el análisis cuantitativo de corte explicativo muestra la evolución del conocimiento en los estudiantes de grado octavo sobre el concepto de dimensión fractal usando el principio de auto-semejanza con GeoGebra y por ende la incidencia positiva en estos al aplicar la unidad didáctica propuesta.

4.2 Conclusiones

1. Es fundamental para realizar un diseño adecuado de la unidad didáctica crear e implementar una cuestionario inicial que permita obtener un punto de partida sobre los factores que requieren mayor atención en una investigación.

2. La aplicación de la unidad didáctica sobre el concepto de dimensión fractal empleando el método de auto-semejanza con GeoGebra es un elemento que mejora el proceso de enseñanza - aprendizaje en los estudiantes; según los resultados del cuestionario final los cuales muestran un incremento significativo vislumbrando la apropiación de los conceptos propuestos.

3. El trabajo cooperativo crea un ambiente propicio para los procesos de aprendizaje, mejorando la comprensión de las temáticas con la interacción entre pares, aumentando el nivel de motivación y autorregulación, promoviendo además destrezas ya que se trabaja en un objetivo en común.

4. Utilizar un medio tecnológico como GeoGebra para construir fractales permite que los estudiantes interactúen con el objeto matemático, trabajando con figuras que no son fractales (figura inicial - contraejemplo) y luego de aplicar el algoritmo de construcción llegar al fractal (ejemplo), incluso permitiéndole realizar varias iteraciones logrando así que el estudiante se apropie de una mejor manera del conocimiento.

5. Al aplicar la teoría didáctica de la matemática de Guy Brousseau para planear la unidad didáctica permitió que hubiera un proceso gradual de aprendizaje en cada una de las actividades planteadas, las cuales fueron variadas (videos, imágenes, construcciones en

GeoGebra, trabajo con material didáctico entre otras) e intencionadas con el fin de mantener motivados los estudiantes y acercarse a los conceptos desde diferentes frentes.

6. El enfoque socio constructivista permite desarrollar las clases de una forma alternativa donde hay generalmente una mediación tecnológica que permite la experimentación, la generación del conocimiento y la utilizar el contexto en el aula de clase, sacando al estudiante de los esquemas tradicionales.

7. Es muy importante la motivación en cada estudiante, ya que si él se encuentra ante una dificultad, este se va a preocupar por superarla, independientemente de si es considerado "bueno" o "no tan bueno" al desarrollar cada una de las actividades que el profesor propone para adquirir un concepto.

8. Al enseñar conceptos geométricos es importante la presencia de material didáctico buscando un aprendizaje significativo y con la aplicación de este se puedan generar los cuestionamientos que permitan de una situación particular llegar a una general.

9. El acercamiento de los estudiantes de la básica media al concepto de dimensión fractal utilizando el principio de auto semejanza con GeoGebra fue satisfactorio (tabla 11), pues encontramos 9 estudiantes (21.4%) con aciertos en la pregunta 4 del cuestionario inicial; pero al finalizar el estudio fueron 40 estudiantes (95.2%), sustentando la hipótesis alterna H1.

10. Algunos estudiantes alcanzaron un nivel de profundidad importante, no solo identifican el concepto de dimensión fractal, sino que también lo explican y entre otras cosas pueden representar formas fractales y no fractales.

4.3 Recomendaciones

11. Se deben proponer más actividades variadas desde el aprendizaje colaborativo para obtener mejores resultados manteniendo la motivación en el aula, todo esto planeado desde una unidad didáctica para fortalecer los procesos de enseñanza-aprendizaje en el aula.

12. Los docentes de matemática deben utilizar enfoques diferentes al tradicional que le permitan vivenciar las diferentes formas de aprehensión de los estudiantes, enriqueciendo por ende su didáctica en la matemática.

13. Se recomienda buscar la obtención del conocimiento utilizando diferentes recursos (imágenes, textos, medio tecnológicos entre otros) ya que en las pruebas externas (SABER, PISA), hay preguntas utilizando diferentes modos de representación que son las que miden principalmente la educación secundaria en Colombia.

14. Utilizar además de la evaluación cuantitativa, la autoevaluación, la co-evalución y la hetero-evaluación sin olvidar retroalimentar los resultados encontrados en el aula.

15. Enseñar en la básica secundaria y en la media, tópicos referentes a la geometría fractal en lo posible con medios tecnológicos ya que el Ministerio de Educación Nacional no tiene dentro del currículo de bachillerado este tipo de contenidos.

16. Realizar el presente estudio desde un enfoque mixto que permita analizar los niveles de aprendizaje de los estudiantes, para identificar qué actividades son las más adecuadas para potenciar los procesos en los estudiantes.

Bibliografía

[1] Atenci, D. (2014). *Diez factores que necesitamos para aprender [Figura].* Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=dThx5C8ft1Y.

[2] Batty, M., & Longley, P. (1994). *Fractal Cities: A Geometry of Form and Function.* San Diego, USA: Academic Press.

[3] Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didacticas.* Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

[4] Cardona Grisales, L. A. (2017). *Elementos de la geometría fractal como estrategia didáctica para desarrollar el pensamiento geométrico en estudiantes de la media básica del C.E. bachillerato en bienestar rural sede Ciato en Pueblo Rico Rda mediante elementos de la naturaleza (tesis de maestría).* Universidad Tecnologica de Pereira, Pereira, Colombia.

[5] DeLorto, R. (2013). *Fractal dimension and Julia sets (tesis de maestría).* Eastern Washington University, Cheney, Washington, USA.

[6] Elaydi, S. (2000). *Discrete Chaos.* Boca Raton, Florida: Chapman & Hall/CRC.

[7] Falconer, K. (1990). *Fractal Geometry.* Inglaterra: John Wiley and Sons.

[8]García Martínez, A. (2004). Las actividades problémicas de aula, ACPA, como unidades didácticas que vinculan la historia de las ciencias en el trabajo de aula. *VI Congreso Latinoamericano de Historia de las Ciencias*, Bueno Aires (Argentina).

[9] García, C., & Romero, S. (2014). *Aprendizaje en profundidad de razones y proporciones basado en la resolución de problemas (tesis de maestría).* Universidad Tecnológica de Pereira. Pereira,Colombia.

[10] Gutiérrez G., M. C., Buriticá A., O. C., & Rodríguez T., Z. E. (2011). *El socioconstructivismo en la enseñanza y el aprendizaje escolar.* Pereira, Risaralda, Colombia: Universidad Tecnológica de Pereira.

[11] Hernández Vicente, A. (2013). *Aplicaciones del teorema del punto fijo: Fractales (tesis de maestría).* Universidad de Murcia, España.

[12]Hernández, R., Férnandez, C., & Baptista, L. (2003). *Metodología de la Investigación.* Mexico: McGraw-Hill.

[13] Johnson, D. W., Johnson, R. T., & Holubec, E. J. (1999). *El aprendizaje colaborativo en el aula.* Buenos Aires, Argentina: Paidós.

[14] León Corredor, O. L. (2012). Cien años de reformas y un problema actual en la enseñanza de la geometría. En L. Camargo, *Investigaciones en Educación Geométrica* (págs. 30-40). Bogota, Cundinamarca, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

[15]Mandelbrot, B. (2004). Fractals and chaos: the Mandelbrot set and beyond. New York: Springer Verlag.

[16] Mandelbrot, B. (2006). *Los Objetos Fractales. Forma, azar y dimensión.* Barcelona, España: Tusquets Editores, S.A.

[17] Orjuela, C., & Rojas, C. (2006). *El concepto de dimensión más que una idea intuitiva (tesis de maestría).* Universidad Pedagógica Nacional de Colombia. Bogota, Colombia.

[18] Panizza, M. (2013). *Conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas .* Recuperado el 01 de 09 de 2017, de http://crecerysonreir.org: http://crecerysonreir.org/docs/Matematicas_teorico.pdf

[19] Parica Ramos, A. T., Bruno Liendo, F. J., & Abancin Ospina, R. A. (2005). *Teoria del constructivismo social de Lev Vigotsky en comparación con la teoria de Jean Piaget.* Caracas: Universidad Central de Venezuela.

[20] Pérez Arango, F. (1992). Los fractales: una alternativa interactiva para la ensenanza de la matematica. *Informatica Educativa, 5*(No.1), 35-42.

[21] Rivera Henao, E., & Lopez Varona, R. (2011). Geometría fractal y transformada de Fourier. Scientia et Technica, 48(XVI), 269-274.

[22] Salbor, C. (1998). Sobre el concepto de fractal. *Albor Ciencia*, 1-9.

[23] Sotos Serrano, M. A. (1993). Didáctica de las matemáticas. *Revista de la Facultad de Educación de Albacete*(8), 173-194.

[24] Talanquer, V. (2002). Fractus, Fracta, Fractal. Fractales, de laberintos y espejos. 120. Mexico, D.F, México: S.L. Fondo de cultura económica.

[25] Vitabar, F. (2010). Imágenes fractales con GeoGebra. *Revista Iberoamericana de educación matemática*(N° 24), 161-175.

[26] Wikipedia. (19 de 01 de 2017). *Autosimilaridad*. Recuperado el 01 de 09 de 2017, de https://es.wikipedia.org: https://es.wikipedia.org/wiki/Autosimilaridad

[27] Zea R, C. M., Atuesta Venegas, M. d., González, M. A., Montoya R, J. I., & Urrego l, I. (2000). Conexiónes: Ambientes de aprendizaje colaborativos, una respuesta a los nuevos retos en educación. *Universidad EAFIT, XXXVI*(118), 47-57.

Anexos

Anexo A. Cuestionarios.

Universidad Tecnológica de Pereira	UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA MAESTRIA EN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA	
ENSEÑANZA DE LA DIMENSIÓN FRACTAL USANDO EL PRINCIPIO DE AUTO-SEMEJANDA CON GEOGEBRA		
CUESTIONARIO	NOMBRE: ___________________________ GRADO:	FECHA: (día / mes /año) _____/_____/_____

*INDICACIONES: Apreciado estudiante, a continuación usted encontrará una serie de preguntas que constan de un enunciado y cuatro opciones de respuesta, de las cuales **sólo una** es la correcta, la cual deberá marcar con una "X" o un "Circulo".* Luego de cada interrogante habrá una serie de cuestionamientos de cómo resolvió cada pregunta. Agradecemos responder de la forma más sincera y honesta posible.

1) A continuación se presentan diferentes tipos de figuras. ¿Cuál crees que es la dimensión asociada a cada una de ellas, según el siguiente orden?

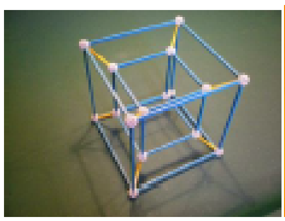


Figura 1

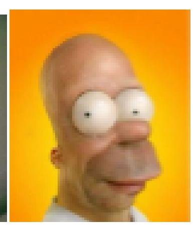


Figura 2

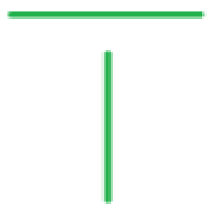


Figura 3


Figura 4

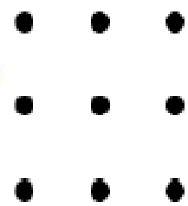


Figura 5

a) Dimensión 1 – 3 – 2 – 4 - 0

b) Dimensión 4 – 3 – 1 – 2 - 0

c) Dimensión 3 – 4 – 0 - 2 - 1

d) Dimensión 2 - 3 – 1- 0 - 4

1.1.¿Por qué crees que esas imágenes tienen la dimensión que seleccionaste? ¿Recordaste algún tema?

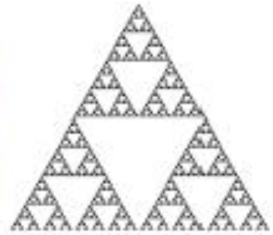
____

____

____

2) De las siguientes imágenes y objetos, ¿Cuáles crees que son fractales?






a) Jabalí – Helecho – Figura con forma de gato – Piedra con forma cubica.

b) Brócoli – Figura de triángulos – Figura con forma de gato – Manzana.

c) Helecho – Brócoli – Figura con cuadrados - Figura de triángulos.

d) Piedra con forma cubica – Helecho – Brócoli – Figura con forma de gato.

2.1 ¿Por qué seleccionaste esas imágenes? Explica.

3) Algunas de las características de los fractales son:

a) Auto semejanza; no se pueden describir con la geometría clásica; están infinitamente detallados.

b) No son auto semejantes, se pueden describir con la geometría clásica, no están detallados.

c) Auto semejanza; se pueden describir con la geometría clásica, tienen dimensión 2.

d) No son auto semejantes, no se pueden describir con la geometría clásica, tienen dimensión 1.

3.1 ¿Qué tuviste en cuenta para seleccionar la respuesta anterior? Explica por favor.

____

____

____

3.2 Realiza un dibujo de una forma fractal y de una no fractal en el siguiente cuadro.

Fractal	Forma no fractal

4) La dimensión de una forma fractal es:

a) Dimensión 3.

b) Dimensión 1.

c) Dimensión 2.

d) Su dimensión es fraccionaria.

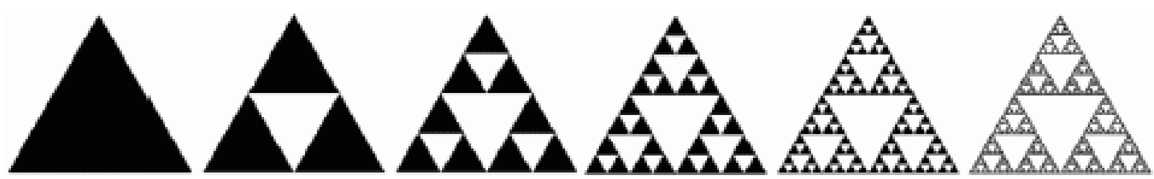
4.1 ¿Por qué seleccionaste la respuesta anterior?, ¿Qué tuviste en cuenta? Escribe tu explicación.

____

____

____

5. ¿Las siguientes imágenes que dimensión tienen? ¿Diferente o igual?. Explica por favor.



____

____

____

Anexo B. Guías de las Actividades.

DISEÑO DE LA UNIDAD DIDÁCTICA:

"ENSEÑANZA DE LA DIMENSIÓN FRACTAL USANDO EL PRINCIPIO DE AUTO SEMEJANZA CON GEOGEBRA A ESTUDIANTES DE LA BÁSICA MEDIA EN LA I.E NUESTRA SEÑORA DE GUADALUPE DE DOSQUEBRADAS RDA"

EL CONTEXTO: INTRA-ESCOLAR (MISIÓN, VISIÓN, RESULTADOS SABER, ASPECTOS A DESTACAR).

La institución educativa nuestra señora de Guadalupe es una institución ubicada en el barrio Guadalupe de la ciudad de Dosquebradas de carácter oficial.

Tiene como misión ofrecer a la comunidad Guadalupana una educación incluyente de calidad, aplicando metodologías y estrategias activas con un talento humano calificado e innovador, desarrollando competencias generales, ciudadanas y laborales en la cual se forman personas competentes y emprendedoras en lo social, académico y laboral. Otorgando título de Bachiller académico, y con profundización en Mantenimiento Electrónico y en Comercio, como gestores de transformación de su entorno.

Su visión es en el año 2018 ser reconocida como una institución líder en educación de calidad formando ciudadanos emprendedores, que se destaquen en competencias laborales de comercio y electrónica, con un modelo pedagógico activo, flexible, innovador e inclusivo basados en el respeto, la honestidad, la responsabilidad e identidad, comprometidos con el desarrollo de su entorno.

La institución obtuvo como resultado de las pruebas Saber 11 del año 2016 – 2, un promedio en matemáticas de **55.82,** teniendo por fortalecer el componente geométrico, variacional entre otros.

En el colegio se encuentran estudiantes que provienen de un nivel socio-económico entre 1-3, siendo una institución que presta un servicio educativo a familias de estrato medio y bajo. Tiene muy buen reconocimientos a nivel regional, nacional e internacional en la participación de eventos educativos, como ferias de emprendimiento, ideas de negocios, ferias de ciencias y tecnología, y en la parte matemática un foro regional de estadística y olimpiadas en matemáticas que ayuda a que los estudiantes participen de forma activa en esta asignatura.

En contraparte el colegio cuenta con un sistema de promoción que va en contra de la filosofía de calidad educativa, ya que la promoción se realiza incluso con la pérdida de 2 áreas, por lo cual un estudiante puede elegir no estudiar matemática todo el bachillerato y graduarse sin ningún inconveniente algo infortunado cuando se refiere a la exigencia, enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; convirtiéndose así en una materia opcional desde este punto de vista, lo cual hace que los docentes de matemáticas deban implementar estrategias tras estrategias para lograr capturar la atención de sus estudiantes y obtener así mejores resultados en las pruebas tanto externas (Saber Pro – Piza) como internas (olimpiadas de matemáticas).

NOMBRE DE LA UNIDAD:	**ENSEÑANZA DE LA DIMENSIÓN FRACTAL USANDO EL PRINCIPIO DE AUTO-SEMEJANZA CON GEOGEBRA**		
ÁREA:	Matemáticas	GRADO: 8	
NUMERO DE SESIONES:	4	NUMERO DE HORAS:	8
NUMERO DE ESTUDIANTES:	42		
DOCENTE:	José Alirio Márquez Vera		

LOS SABERES

DESCRIPCIÓN	En la topología se pueden analizar diferentes tipos de dimensiones, desde la 1-dimensión que pertenece a un conjunto vacío y esta se va incrementando según la naturaleza de la forma, generalmente en números enteros positivos hasta una dimensión n, ahora bien si analizamos la dimensión de una forma fractal podemos encontrar que estas se encuentran principalmente entre la primera y segunda dimensión, como característica peculiar no es entera, pertenece a los números racionales, por lo tanto con la presente propuesta se brinda una forma innovadora de presentar la dimensión de ciertos fractales aplicando el principio de auto-semejanza con ayuda del software GeoGebra.		
SABERES	**Conceptuales**	**Procedimentales**	**Actitudinales**
	• ¿Qué es dimensión? • Formas geométricas • Relación de Escala • Auto-Semejanza • Congruencia • Secuencias • Fractales Geométricos • Dimensión Fractal	• Dibujas figuras de las diferentes dimensiones. • Construir formas fractales en Geogebra y otros programas • Usar figuras para hallar la dimensión de un fractal usando auto-semejanza.	• Atención en clase. • Aprendizaje colaborativo. • Disciplina. • Cumplimiento de actividades en el tiempo establecido.
BJETIVO GENERAL	Al finalizar la unidad didáctica, lo estudiantes del grado 8, estarán en capacidad de reconocer la dimensión y construcción de ciertas formas fractales usando el principio de auto-semejanza **mediante** la observación, experimentación, identificación y comparación; además del registro de datos y verificación de los resultados para aproximarlos al conocimiento científico.		
OBJETIVOS ESPECÍFICOS.	• Identificar las ideas previas de los estudiantes. • Diferenciar las dimensiones del espacio hasta la 4ta dimensión • Construir formas fractales a partir de la repetición de formas. • Identificar que la dimensión de un fractal no es entera mediante la el principio de auto-semejanza aplicando la formula correspondiente. • Crear su propio fractal, eligiendo una forma básica, en Geogebra o en papel.		

COMPETENCIA – MEN	• Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas. • Aplico y justifico criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas. • Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.			
ESTÁNDAR	- PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS.			
ACCIONES DE PENSAMIENTO Y PRODUCCIÓN	▪ ***Me aproximo al conocimiento como matemático natural.*** ▪ ***Manejo conocimientos propios de las matemáticas.*** ▪ ***Desarrollo compromisos personales y sociales.***			
EVALUACIÓN	Desempeño	Formas e instrumentos		
	• Usa los sentidos para describir los aspecto más relevantes al momento de realizar los actividades • Responde preguntas sobre las observaciones que hace se hacen en la clase. • Realiza preguntas a partir de lo realizado en las actividades.	Bitácora del estudiante para el registro del desarrollo de las actividades, evidencias de observaciones, descripciones, predicciones, resultados y formulación de preguntas.		
SESIONES DE LA UNIDAD DIDÁCTICA	1	2	3	4
	¿Qué sabemos de las dimensiones del universo y que es una escala?	¿Qué es un fractal? ¿Cuál es la dimensión del polvo de Cantor?	¿Cuál es la dimensión del triángulo de Sierpiński?	¿Qué es la esponja de Menger y cuál es su dimensión?
	Exploración e Introducción al Tema	Introducción de nuevos conceptos	Exploración	Relación de conceptos nuevos con el concepto general

<table>
<tr><td colspan="5">SESIÓN 1. EXPLORACIÓN DE IDEAS PREVIAS E INTRODUCCIÓN AL TEMA</td></tr>
<tr><td colspan="5">PREGUNTA GUÍA: ¿Qué sabemos de las dimensiones del universo y que es una escala?</td></tr>
<tr><td>OBJETIVO</td><td colspan="4">Identificar las ideas previas que posean los estudiantes sobre las dimensiones de los objetos y figuras a nuestro alrededor, dibujar ciertos elementos básicos en Geogebra, realizar medición de figuras para hallar su relación de escala, y realizar trabajo colaborativo.</td></tr>
<tr><td>Indicadores de desempeño</td><td colspan="4">- Realiza preguntas acerca del tema en cuestión.
- Registra sus pre-saberes de manera clara en la ficha.
- Explica por qué está seguro de lo que dice frente a la pregunta generadora de la clase.
- Mide algunas figuras y halla su factor de escala.
- Dibuja elementos que pertenecen diferentes dimensiones del espacio en Geogebra.</td></tr>
<tr><td>DURACIÓN</td><td colspan="4">2 horas de clase (120 minutos)</td></tr>
<tr><td>ORGANIZACIÓN DEL ESPACIO</td><td colspan="4">Los estudiantes deben agruparse con un compañero trabajo en parejas donde se desarrollara la actividad inicial y se registraran los resultados, luego cada estudiante se ubica en un computador individual teniendo al lado su pareja entre los dos desarrollan el algoritmo en GeoGebra, prestándose ayuda mutua.</td></tr>
<tr><td>Tiempo (Minutos)</td><td>Objetivos de la actividad</td><td>Desempeño docente</td><td>Desempeño estudiante</td><td>Materiales</td></tr>
<tr><td>10</td><td>Encuadre</td><td>Se da la bienvenida y se explican las normas a tener en cuenta para el desarrollo de la actividad, por ejemplo:

- Levanto la mano para participar
- Escribo todas mis dudas
- Respondo la ficha en su totalidad
- Pregunto, si no entiendo algo
- Doy un uso adecuado del computador</td><td>Escucha las indicaciones del profesor</td><td>Ninguno</td></tr>
<tr><td>30</td><td>Recoger la ideas previas de los estudiantes</td><td>Cuente a los estudiantes el siguiente relato “El punto solitario”.
“Un punto solitario, cansado de estar solo, perdido y quieto en una dimensión vacia, decidió unirse con otro punto que estaba adelante mediante un puente por lo cual ya se podía mover, pero solo de forma horizontal, quiso moverse más por lo que se unió con otro punto que estaba arriba mediante otro puente y ya se podía mover tanto horizontal como verticalmente, quiso moverse más aun por lo que decidió unirse con otro punto que estaba frente a él, con otro puente y pudo moverse en varias direcciones por lo que estaba feliz y decidió convertirse en un cubo”
Terminado el relato se pregunta ¿Qué entiendes por dimensión? Debiendo responder en la ficha (anexo 1)
Termine la clase haciendo la pregunta general</td><td>Responden por grupo.

Contestan preguntas del docente.</td><td>Ficha Anexo 1</td></tr>
</table>

		¿En qué dimensión nos encontramos? y ¿Qué sabes de las dimensiones del universo? Registre las ideas previas en un cartel, el cual tendrá durante toda la unidad didáctica. Despida realizando conclusiones de la clase.		
20	Proyectar un video sobre las dimensiones del universo.	Se proyecta un video de corta duración donde se explican las dimensiones desde la dimensión de un punto hasta la quinta dimensión. Y el docente complementa el tema, presentando objetos y dibujos que pueden dar una idea sencilla del concepto de dimensión. Los estudiantes deben responder con base en esto las preguntas de la ficha **(anexo 1).** https://www.youtube.com/watch?v=Ge3Gl5noex4 (Explicación simple de las 10 dimensiones) Video en ingles con subtítulos en español	Responden en parejas con las ideas de los dos. Realizar preguntas al docente	Ficha Anexo 1 Video Beam Computador
30	Mide algunas figuras y halla su factor de escala	Se proyecta un video corto 4 minutos sobre el tema. Se les entrega reglas y una hoja con figuras y se les solicita que midan una de las dimensiones sea el largo o el ancho y las comparen. Los estudiantes debe registrar en la hoja sus resultados y utilizar la calculadora del computador para realizar las operaciones en caso de ser necesario, para obtener un factor de escala y escribir si es una escala de aumento o reducción **(anexo 2)** https://www.youtube.com/watch?v=uTbe8I5IEgk (Factor de escala) Video donde se hace una explicación de los factores de escala	Responder en parejas con las ideas de ambos. Dibujar diferentes formas para representar las dimensiones. Con los compañeros discutir sobre los dibujos hechos y llegar a consensos si lo realizado esta bien.	Anexo 2 Regla Lápiz Computador Amplificaor de sonido
30	Dibujar diferentes formas geométricas básicas	El docente explica las diferentes herramientas que tiene el programa Geogebra, y realiza ejemplos para que los estudiantes puedan practicar. Se les invita para que dibujen formas para practicar las herramientas de Geogebra y respondan las preguntas de la ficha **(anexo 3).**	Responder en parejas con las ideas de ambos. Dibujar diferentes formas para representar las dimensiones. Con los compañeros discutir sobre los dibujos hechos y llegar a consensos si lo realizado esta bien.	Ficha Anexo 3 Portátil Geogebra

<table>
<tr><td colspan="5">SESIÓN 2. INTRODUCCIÓN DE NUEVOS CONCEPTOS-EXPLORACIÓN</td></tr>
<tr><td colspan="5">PREGUNTA GUÍA: ¿Qué es un fractal? ¿Cuál es la dimensión del polvo de Cantor?</td></tr>
<tr><td>OBJETIVO</td><td colspan="4">Identificar, describir y dibujar el fractal de Cantor, trabajar de forma colaborativa.</td></tr>
<tr><td>Indicadores de desempeño y evaluación.</td><td colspan="4">- Presenta de manera clara sus preconceptos sobre dimensión
- Realiza la actividad siguiendo las instrucciones.
- Observa y describe lo sucedido durante la práctica con material didáctico.
- Realiza hipótesis acerca del comportamiento de fractal de Cantor.
- Construye mediante una guía de trabajo el fractal de Cantor.
- Registra sus pre-saberes, procedimientos y conclusiones en la bitácora.
- Compara lo que pensaba antes y lo que piensa después de la actividad llegando a una solución a la pregunta general.</td></tr>
<tr><td>DURACIÓN</td><td colspan="4">2 horas (120 minutos)</td></tr>
<tr><td>ORGANIZACIÓN DEL ESPACIO</td><td colspan="4">Los estudiantes deben agruparse con un compañero trabajo en parejas donde se desarrollara la actividad inicial y se registraran los resultados, luego cada estudiante se ubica en un computador individual teniendo al lado su pareja entre los dos desarrollan el algoritmo en GeoGebra, prestándose ayuda mutua.</td></tr>
<tr><td>Tiempo (Minutos)</td><td>Objetivos de la actividad</td><td>Desempeño docente</td><td>Desempeño estudiante</td><td>Materiales</td></tr>
<tr><td>10</td><td>Encuadre</td><td>Se les da la bienvenida a los estudiantes.
Se recuerda el uso de las normas de la clase.

- Al participar levanto la mano
- Cuido los materiales de trabajo
- Mantengo el orden al formar parejas
- Entrego bitácora y fichas resueltas
- Respeto el material de los demás grupos
- Doy buen uso del computador.

Les cuenta que hoy van a realizar una práctica con material didáctico, que luego se va a dibujar en Geogebra usando la bitácora, y se registraran las observaciones en la ficha de ambas prácticas.</td><td>Escucha las indicaciones del profesor.</td><td>Ninguno</td></tr>
<tr><td>40</td><td>Propiedades, registro de escalas, uso de material didáctico</td><td>Se inicia la actividad entregando a cada estudiante la bitácora de la clase y a partir de la pregunta ¿Qué es un fractal?, se inicia la práctica con material didáctico.

Se les indica a los estudiantes que realicen la práctica con los materiales siguiendo las instrucciones de la bitácora, y registren sus apreciaciones a partir de la forma inicial en la ficha correspondiente.</td><td>Los estudiantes realizan la actividad en acompañamiento con el docente y registran lo que sucede en la bitácora y ficha respectiva por parejas.</td><td>Bitácora

Tablero

Marcadores

Fichas</td></tr>
</table>

		Se pide a los estudiantes que respondan según lo que crean ¿Qué es un fractal? ¿Cuál es la dimensión del polvo de Cantor? Se les pide que lo escriban en la bitácora personal. Se espera que durante la actividad los estudiantes predigan el comportamiento de la figura y comprendan el principio de construcción de un fractal geométrico **(anexo 5)**		Materiales de trabajo de la actividad Regla Tijeras Colores (Opcional)
30	Construcción del polvo de Cantor usando el Software Geogebra	Se entrega a los estudiantes una guía para que utilizando las herramientas de Geogebra construyan el conjunto de Cantor y lleguen así a una respuesta más cercana de las preguntas iniciales por parejas. ¿Qué es un fractal? ¿Cuál es la dimensión del polvo de Cantor? **(anexo 6)**	Realización de forma individual del polvo de Cantor en Geogebra, comparando los resultados con los de su compañero.	Bitácora Fichas Computador Guía para Geogebra
15	Puesta en común. Los estudiantes vuelven a sus fichas y bitácoras.	Se discute brevemente haciendo preguntas como: ¿Cuál es la forma inicial? ¿Cuál es la dimensión de la forma inicial? ¿Qué está sucediendo con la forma inicial? ¿Qué pasaría si seguimos repitiendo el mismo proceso de forma indefinida? ¿Cuál es la dimensión de las demás formas? ¿Es la misma? Se pide a los estudiantes llenar la bitácora, escribiendo que piensan ahora de ¿Qué es un fractal? ¿Cuál es la dimensión del polvo de Cantor? **(anexo 6)**	Discusión sobre las preguntas que plantea por el profesor. Vuelven a sus registros (fichas y bitácoras) para dar respuesta a las preguntas.	Bitácora Fichas
10	Comunicación	Se pide que socialicen sus registros y las soluciones que dieron a la inquietud de ¿Qué es un fractal? ¿Cuál es la dimensión del polvo de Cantor? **(anexo 6)**	Presentan las conclusiones a las que llego el grupo frente a las diferentes preguntas.	Bitácora Fichas
10	Institucionalización	Se Recogen las experiencias de los estudiantes por medio de preguntas como:	Escuchan y responden las preguntas del	Bitácora Fichas

		¿Entonces una línea cualquiera es un fractal? ¿La dimensión de una línea y de un fractal es la misma? ¿Por qué?. Concluya con los estudiantes el principio de construcción de un fractal y cuál es su dimensión según el principio de auto semejanza. Escribir en un cartel las conclusiones enseguida de las predicciones iniciales y compárelas una con la otras ejemplo: <entonces la dimensión de un fractal es diferente a la dimensión de una línea… RECALQUE con entusiasmo las palabras claves (Fractal, dimensión fraccionaria) recuerda hablar de forma breve sobre la biografía de George Cantor, al inicio de la sesión.	docente	
10	Autoevaluación, co-evaluación y hetero-evaluación	Se les pide a cada uno de los estudiantes que escojan un compañero, el cual van a evaluar y les facilite la ficha de co-evaluación **(anexo 7).** Cada estudiante debe llenar la ficha de autoevaluación **(anexo 8**). Y entregan lo realizado al profesor. Al finalizar el profesor evalúa cada estudiante **de acuerdo a los indicadores de desempeño**	Analizan los roles asumidos por cada uno y valoran el cumplimiento de los logros grupales e individuales.	Formatos de evaluación

<table>
<tr><td colspan="5">SESIÓN 3 EXPLORACIÓN</td></tr>
<tr><td colspan="5">PREGUNTA GUÍA: ¿Cuál es la dimensión del triángulo de Sierpiński?</td></tr>
<tr><td>OBJETIVO</td><td colspan="4">Identificar, dibujar y hallar la dimensión fractal del triángulo de Sierpiński usando el principio de auto-semejanza y aprendizaje colaborativo.</td></tr>
<tr><td>Indicadores de desempeño y evaluación</td><td colspan="4">- Presenta de manera clara sus preconceptos sobre dimensión y forma fractal
- Realiza una construcción geométrica en Geogebra siguiendo las instrucciones
- Observa y describe lo sucedido en cada iteración de figuras.
- Realiza hipótesis acerca del comportamiento de la forma al continuar con la construcción
- Registra sus pre-saberes, procedimientos y conclusiones en la bitácora
- Compara lo que pensaba antes y lo que piensa después de lo experimentado llegando a una solución a la pregunta general.
- Dibuja una forma fractal seleccionando una forma básica.</td></tr>
<tr><td>DURACIÓN</td><td colspan="4">2 horas (120 minutos)</td></tr>
<tr><td>ORGANIZACIÓN DEL ESPACIO</td><td colspan="4">Los estudiantes deben agruparse con un compañero trabajo en parejas donde se desarrollara la actividad inicial y se registraran los resultados, luego cada estudiante se ubica en un computador individual teniendo al lado su pareja entre los dos desarrollan el algoritmo en GeoGebra, prestándose ayuda mutua.</td></tr>
<tr><td>Tiempo (Minutos)</td><td>Objetivos de la actividad</td><td>Desempeño docente</td><td>Desempeño estudiante</td><td>Materiales</td></tr>
<tr><td>10</td><td>Encuadre</td><td>Se les da la bienvenida a los estudiantes.
Les recuerda el uso de las normas de la clase.
- Al participar levanto la mano
- Cuido los materiales de trabajo
- Entrego bitácora y fichas resueltas
- Doy un uso adecuado de computador para desarrollar la actividad

Se realiza una breve retroalimentación de lo concluido en la sesión anterior.</td><td>Escucha las indicaciones del profesor y la retroalimentación</td><td>Ninguno</td></tr>
<tr><td>40</td><td>Apertura</td><td>Se entrega a los estudiantes la bitácora de clase y se proyecta un video con el cual dibujaran una forma fractal y una no fractal seleccionando una forma básica, se abren espacios para la discusión en algunos momentos claves del video.
https://www.youtube.com/watch?v=KKAb_oxKcoU (Fractales. A la caza de la dimensión oculta)</td><td>Realizar una forma fractal y una no fractal y pintarla (Anexo 20)</td><td>Colores
Hoja
Lápiz
Video Beam
Amplificador de sonido
Computador</td></tr>
<tr><td>30</td><td>Predicciones y registros</td><td>se les solicita a los estudiantes construir el triángulo de Sierpiński como lo desarrolla la guía e ir contestando las preguntas de la ficha correspondiente que permitirán acercar al estudiante a la respuesta de la</td><td>Los estudiantes realizan la actividad de forma grupal registrando los</td><td>Bitácora

Tablero

Marcadores</td></tr>
</table>

		pregunta ¿Cuál es la dimensión del triángulo de Sierpiński? **(anexo 10)**	resultados en la bitácora	Fichas Computador
10	Puesta en común. Los estudiantes vuelven a sus fichas y bitácoras.	Se discute brevemente haciendo preguntas como: ¿Cuál es la forma inicial? ¿Cuál es la dimensión de la forma inicial? ¿Qué está sucediendo con la forma inicial? ¿Qué pasaría si seguimos repitiendo el mismo proceso de forma indefinida? ¿Cuál es la dimensión de las demás formas? ¿Es la misma? Se pide a los estudiantes llenar la bitácora, escribiendo que piensan ahora de ¿Cuál es la dimensión del triángulo de Sierpiński**(anexo 11)**	Los estudiantes realizan la actividad en acompañamiento con el docente y registran lo que sucede en la bitácora y ficha respectiva.	Bitácora Tablero Marcadores Fichas Computador
10	Comunicación	Se pide que socialicen sus registros y las soluciones que dieron a la inquietud ¿Cuál es la dimensión del triángulo de Sierpiński?	Presentan las conclusiones a las que llego el grupo.	Bitácora Fichas
10	Institucionalización	Se Recogen las experiencias de los estudiantes por medio de preguntas como: ¿El triángulo es un fractal? ¿La dimensión de un triángulo y de un fractal es la misma? ¿Por qué? ¿La dimensión de las secuencias 2 y 3 es la misma? Concluya con los estudiantes el principio de construcción de un fractal y cuál es su dimensión según el principio de auto semejanza. Escribir en un cartel las conclusiones enseguida de las predicciones iniciales y compárelas una con las otras ejemplo: <entonces la dimensión del triángulo de Sierpiński es … **(anexo 11)**	Escuchan y responden las preguntas del docente	Bitácora Fichas
10	Autoevaluación, co-evaluación y hetero-evaluación	Se les pide a cada uno de los estudiantes que escojan un compañero, el cual van a evaluar y les facilite la ficha de co-evaluación**. (anexo 12)** Cada estudiante debe llenar la ficha de autoevaluación**. (anexo 13)** Y entregan lo realizado al profesor. Al finalizar el profesor evalúa cada estudiante	Analizan los roles asumidos por cada uno y valoran el cumplimiento de los logros grupales e individuales.	Formatos de evaluación

<table>
<tr><td colspan="5">SESIÓN 4 RELACIÓN DE LOS NUEVOS CONCEPTOS CON EL CONCEPTO GENERAL</td></tr>
<tr><td colspan="5">PREGUNTA GUÍA: ¿Habrán fractales a nuestro alrededor?</td></tr>
<tr><td>OBJETIVO</td><td colspan="4">Relacionar los fractales con la naturaleza, construir la esponja de Menger con material didáctico, dibujar la alfombra de Sierpiński con uso de Geogebra para visualizar la transición entre la segunda y tercera dimensión además de desarrollar trabajo colaborativo.</td></tr>
<tr><td>Indicadores de desempeño y evaluación</td><td colspan="4">- Presenta de manera clara sus preconceptos sobre algunos fractales geométricos.
- Experimenta siguiendo las instrucciones.
- Observa y describe lo sucedido durante la creación de los fractales.
- Realiza hipótesis acerca del fenómeno de la formación de la esponja de Menger.
- Registra sus pre-saberes, procedimientos y conclusiones en la bitácora.
- Compara lo que pensaba antes y lo que piensa después de lo experimentado llegando a la respuesta de la pregunta general.
- Relaciona un cambio dimensión de los fractales (explicitado en bitácora y fichas de trabajo)</td></tr>
<tr><td>DURACIÓN</td><td colspan="4">2 horas (120 minutos)</td></tr>
<tr><td>ORGANIZACIÓN DEL ESPACIO</td><td colspan="4">Los estudiantes deben agruparse con un compañero trabajo en parejas donde se desarrollara la actividad inicial y se registraran los resultados, luego cada estudiante se ubica en un computador individual teniendo al lado su pareja entre los dos desarrollan el algoritmo en GeoGebra, prestándose ayuda mutua.</td></tr>
<tr><td>Tiempo (Minutos)</td><td>Objetivos de la actividad</td><td>Desempeño docente</td><td>Desempeño estudiante</td><td>Materiales</td></tr>
<tr><td>10</td><td>Encuadre</td><td>Se les da la bienvenida a los estudiantes.
Les recuerda el uso de las normas de la clase.

- Al participar levanto la mano
- Cuido los materiales de trabajo
- Entrego bitácora y fichas resueltas
- Doy un uso adecuado de computador para desarrollar la actividad.

Se realiza una breve retroalimentación de lo concluido en la sesión anterior.</td><td>Escucha las indicaciones del profesor y la retroalimentación de la sesión de anterior</td><td>Ninguno</td></tr>
<tr><td>20</td><td>Registro de observaciones</td><td>Se inicia la actividad entregando a cada estudiante la bitácora de la clase, se les indica que registren en ella sus observaciones.

Se entrega a los estudiantes algunos fractales naturales, brócolis, helechos, algunos trozos de ciertas plantas, manzanas, limones, mangos, y se proyectan imágenes de ciertos fractales naturales para que registren sus observaciones.
(anexo 14)
Luego en Geogebra se proyectan diferentes fractales, construidos previamente y se</td><td>Los estudiantes realizan la actividad de forma grupal registrando los resultados en la bitácora</td><td>Bitácora

Tablero

Marcadores

Fichas

Video Beam

Computador</td></tr>
</table>

		explican las dimensiones de algunos de ellos. Se solicita a los estudiantes responder la pregunta inicial ¿Habrán fractales a nuestro alrededor?		
40	Construcción del Tapete de Zierpinsky y comparación con objeto tridimensional	Se solicita a los estudiantes que construyan el tapete de Sierpiński, usando la guía para Geogebra y describan como se va formando el fractal **(anexo 15 y anexo 16).** Al terminar de realizar este ejercicio se solicita a los estudiantes construir un cubo compuesto por cubos más pequeños (Material Didáctico), y se pide quitar cubos de cada cara para observar que se forma. Se pide a los estudiantes responder las preguntas: ¿Qué relación hay entre el tapete y el cubo de Menger en su construcción? ¿En qué dimensiones esta cada uno? **(anexo 17)**	Construcción del tapete de Sierpiński Construcción grupal del cubo de Menger Comparación entre las 2 construcciones	Bitácora Tablero Marcadores Material Didáctico. Fichas Video Beam Computador
15	Puesta en común. Los estudiantes vuelven a sus fichas y bitácoras.	Se discute brevemente haciendo preguntas como: ¿Cuál es la dimensión de la forma inicial? ¿Qué está sucediendo con la forma inicial? ¿Qué pasaría si seguimos repitiendo el mismo proceso de forma indefinida? ¿Cuál es la dimensión de las demás formas? ¿Es la misma? ¿Cuáles son las formas básicas de construcción de cada una? ¿Qué dimensión tiene el tapete? ¿Qué dimensión tiene el cubo de Menger? Se pide a los estudiantes llenar la bitácora, escribiendo que piensan ahora de ¿Qué tipos de fractales hay? ¿Habrán fractales entre la segunda y tercera dimensión? **(anexo 17)**	Los estudiantes realizan la actividad en acompañamiento con el docente y registran lo que sucede en la bitácora y ficha respectiva.	Bitácora Tablero Marcadores Fichas Computador
15	Comunicación	Se pide que socialicen sus registros y las soluciones que dieron a la inquietud ¿Qué tipos de fractales hay? ¿Habrán fractales entre la segunda y tercera dimensión?	Presentan las conclusiones a las que llego el grupo frente a las diferentes dudas.	Bitácora Fichas
10	Institucionalización	Se Recogen las experiencias de los estudiantes por medio de preguntas como: ¿El cuadrado y el cubo es un fractal? ¿Qué diferencia hay entre un cuadrado y un cubo?	Escuchan y responden las preguntas del docente	Bitácora Fichas

		¿La dimensión de un cubo y de la esponja de Menger es la misma? ¿Por qué? ¿La dimensión del tapete de Sierpiński y de la esponja es la misma? ¿Habrán fractales entre la segunda y tercera dimensión? Concluya con los estudiantes el principio de construcción de un fractal y cuál es su dimensión según el principio de auto semejanza. Escribir en un cartel las conclusiones enseguida de las predicciones iniciales y compárelas unas con las otras ejemplo: <entonces hay fractales que tienen dimensión entre las segunda y tercera dimensión …		
10	Autoevaluación, co-evaluación y hetero-evaluación	Los estudiantes para su parte evaluativa deben llenar la se co-evaluación y su autoevalúa **(anexo 18 y anexo 19).**	Entregar al docente, totalmente diligenciado la bitácora con las fichas de trabajo	Fichas de Coevalución y Autoevaluación

ANEXO 1 – SESIÓN 1.

NOMBRE: ______________________________ FECHA: ____________

GRADO: __________

¿Qué entiendes por dimensión?

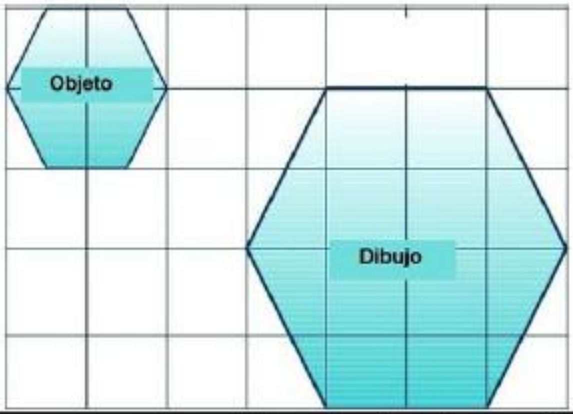
¿En qué dimensión nos encontramos? y ¿Qué sabes de las dimensiones del universo?

Luego de ver el video y las imágenes mostradas - ¿Qué es dimensión y cuáles recuerdas?

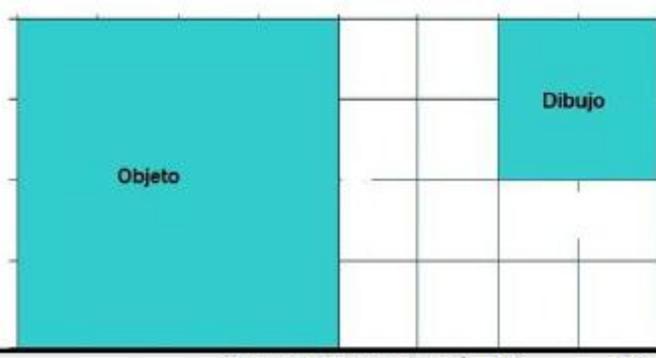
Traducción del docente

ANEXO 2 – Sesión 1

A continuación se presentan ciertas figuras, con ayuda de una regla mida los lados, registre sus resultados y las divisiones con las medidas obtenidas.



		Tus mediciones (cm ó mm)		Resultado al Dividir
Medida Lado Dibujo / Medida Lado Objeto	=	______________________	=	



		Tus mediciones (cm ó mm)		Resultado al Dividir
Medida Lado Dibujo / Medida Lado Objeto	=	______________________	=	

		Tus mediciones (cm ó mm)		Resultado al Dividir
Medida Lado Dibujo 1 / Medida Lado Objeto	=	______________	=	
		Tus mediciones (cm ó mm)		Resultado al Dividir
Medida Lado Dibujo 2 / Medida Lado Objeto	=	______________	=	
		Tus mediciones (cm ó mm)		Resultado al Dividir
Medida Lado Objeto / Medida Lado Objeto	=	______________	=	

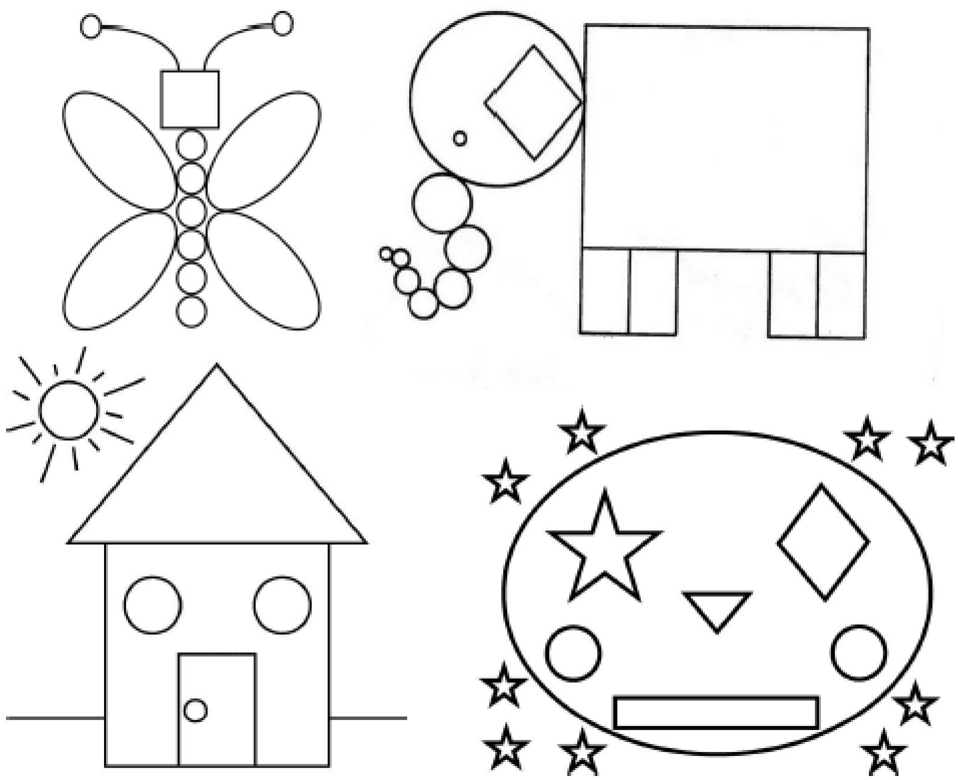
En los casos anteriores el resultado al dividir, ¿Cuándo es igual a 1? ¿Cuándo es mayor a 1? ¿Cuándo es menor a 1?

Explica:____

Traducción del docente:

Anexo 3 – Sesión 1

Con ayuda del programa Geogebra, realiza alguna de las figuras que se muestran a continuación, por favor agrégales color.



¿Qué fue lo más fácil al usar el programa?

____

____

¿Qué fue lo que te dio más dificultad?

____

ANEXO 5 – SESIÓN 2.

NOMBRE: ____ FECHA: ____________________

GRADO: ________________

¿Sabes que es un fractal? Si___ Explica: _______________________________ No: _____

¿Qué dimensión tiene una línea recta horizontal o vertical? Sustenta.

____
____
____

Mientras realizamos la práctica con material didáctico del conjunto de cantor guiado por el docente vamos a ir llenando la información que se muestra a continuación (Parejas):

	A - Objeto		N	B - Copia	r (Factor escala)
	Medida largo del papel original	Divisiones del papel	Al doblar 1 del medio quedan	Medida de una división	División B/A
1er vez					
2da vez					
3cer Vez					

Formula para hallar la dimensión	Iteración	Operación	Resultado - Dimensión
$D = \frac{Ln\,(N)}{Ln\,(1/r)}$	1er vez	Ln(_____)/Ln(1/ _____)	
	2da vez	Ln(_____)/Ln(1/ _____)	
	3cer Vez	Ln(_____)/Ln(1/ _____)	

¿Cuál es la dimensión de auto semejanza en los tres casos, igual o diferente? ¿Por qué crees que esto es así?

____
____

¿Cuál era la dimensión de la forma original? ____

¿Cuál es entonces la dimensión del fractal de Cantor? _____________________________________

¿La dimensión del fractal de cantor es mayor o menor que la dimensión de la forma original? ______________
____
____

Observando la construcción del fractal cómo definirías un fractal:_____________________________
____
____

ANEXO 6 – Sesión 2

Ingresar a Geogebra y seguir los siguientes pasos:

1. Modificar la vista gráfica (Menú **Edita**, desmarcar opción ejes. Menú **Edita**, desmarcar opción cuadrícula)

2. En la barra de entrada: **Escribir A=(0,0), enter, B=(9,0), enter, a=Segmento[A,B], enter**. (Definir un segmento AB=a , puede hacerse con la herramienta segmento entre dos puntos o usando la barra de entrada)

3. Dividir el **segmento** a en tres partes iguales para generar los segmentos de la primera etapa (escribir en la barra de entrada: Escribir C=A **enter**, D=A+1/3*(B-A) **enter**, E=A+2/3*(B-A) **enter**, F=B **enter**, b=Segmento[C,D] **enter**, c=Segmento[E,F] **enter**.

4. Para que se vea mejor desplazamos los puntos C, D, E y F una unidad hacia arriba (Doble clic sobre el punto C en la vista algebraica, en la nueva ventana redefinirlo **sumando + (0,1), Ejemplo. A+ (0,1), enter**, ok. Repetir el proceso con los otros puntos).

5. Creamos una nueva herramienta para repetir esta primera etapa a partir de cualquier segmento (Seleccionar del menú Herramientas la opción **Creación de una nueva Herramienta**. En la pestaña **Objetos de Salida** elegimos **C, D, E, F, b, c, siguiente**. En la pestaña **Objetos de entrada** dejamos los puntos **A y B, siguiente**. En la pestaña Nombre e Icono escribimos **Cantor1**. Clic en concluir).

6. Para generar las etapas siguientes: **clic en la herramienta Cantor1 y clic en los extremos del segmento**. Continua el proceso por lo menos 3 veces, de esta forma construimos el fractal de cantor.

¿Qué pasaría si repetimos el procedimiento anterior de forma indefinida, la línea inicial se convertiría en qué? Explica.

____
____
____

La dimensión de la línea inicial es: ¿igual o diferente a las otras secuencias? Explica.

____
____
____

¿Cómo son unas figuras respecto a las otras? Explica.

____
____
____

Anexo 7 – Sesión 2

Co-evaluación

En grupo proponen dos cosas que deban saber para responder la pregunta ¿Qué es un fractal? Y ¿Cuál es la dimensión del fractal de Cantor?, y cada estudiante se evalúa así:

a. Lo sé bien b. lo sé regular c. no lo sé

Fecha ________________ Grado___________

Actividad realizada: ____

Nombre del evaluador ____

Escriben dos cosas que deban saber para responder la pregunta ¿Qué es un fractal? Y ¿Cuál es la dimensión del fractal de Cantor?	Cada estudiante dirá si a. Lo sé bien b. lo sé regular c. no lo sé			
	Estudiante A Nombre:________ ______________ ______________	Estudiante B Nombre:_______ _ ______________ ______________	Estudiante C Nombre:_______ _ ______________ ______________	Estudiante D Nombre:_______ ______________ ______________
1				
2				

Anexo 8 – Sesión 2

Autoevaluación

Fecha _______________ Grado__________

Actividad: El Polvo o Fractal de Cantor

Nombre: ____

Autoevaluación

Dibujo y respondo

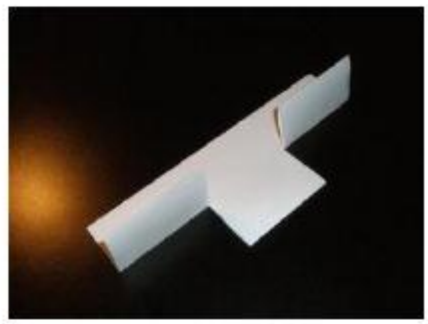
Preguntas	Dibujo mi respuesta	Escribo mi respuesta	Traducción del docente
¿Cómo fue la construcción del conjunto de Cantor con Geogebra?			
¿Qué instrumentos de medida y observación utilice y cómo?			
¿Durante todo el trabajo que hice bien?			
¿Durante todo el trabajo que debo mejorar? ¿En que tuve dificultad?			
¿Qué aprendí?			

Anexo 9 – Sesión 2

Construcción en Papel del Conjunto de Cantor – Material Didáctico

Para construir el modelo de papel del conjunto de Cantor comenzamos con una hoja de papel y la doblamos longitudinalmente. Dividimos la hoja a lo largo del doblez en tres partes iguales, haciendo dos cortes de longitud la mitad de lo que queda hasta el otro lado.

Marcamos los dobleces como se ve en la figura.



Doblamos los lados de los extremos por los cortes

Volvemos a cortar en tercios hasta la mitad en cada uno de los lados…

…y doblamos, el lado intermedio de cada parte.

En cada una de las cuatro nuevas solapas, repetimos el procedimiento, cortar en tercios…

Y así hasta que nos cansemos (que en nuestro caso ha sido ¡ya!). Ahora sólo hay que ir orientando los dobleces en el sentido que nos interesa. Primero, "los dobleces más grandes" los metemos "para dentro" como muestra la figura.

Desde el otro lado se ve así.

Los siguientes más grandes los doblamos en la dirección contraria.

Y los otros también (y si tuviéramos más pues también)

Este es el conjunto de Cantor hasta la tercera iteración.

Resultado Final

ANEXO 10 – Sesión 3

NOMBRE: ____ FECHA: ______________________

GRADO: _________________

Ingresar a Geogebra y seguir los siguientes pasos para construir el Triángulo de Sierpinski

1. Escribir en entrada: A=(0,0), **enter**; B=(4,6), **enter**, C = (8, 0), **enter;** Luego escribir: **Triángulo=polígono(A,B,C), enter (recuerda usar las tildes)**, así se construye un triángulo ABC.

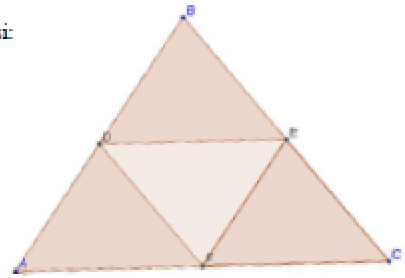
2. Marcar los puntos medios D, E y F de los lados del triángulo AB, BC y CA respectivamente. Escribiendo: **puntomedio(c) enter**, **puntomedio(a) enter**, **puntomedio(b) enter**.

3. Construir los triángulos ADF, DBE y FEC así:

Polígono(A,D,F) enter

Polígono(B,D,E) enter

Polígono(F,E,C) enter



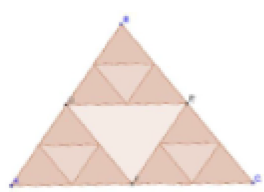
4. Para repetir esta construcción, utilizamos la opción ***Creación de herramienta nueva*** en el menú ***Herramientas.***

5. Seleccionar como ***Objeto de entrada*** el triángulo ABC y como objeto de salida los triángulos ADF, DBE y FEC

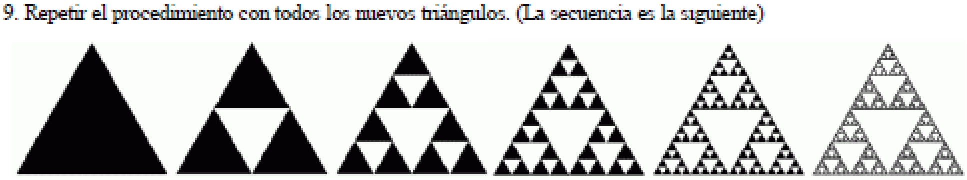
6. Concluir la creación de la herramienta.

7. Aparece un nuevo botón en la barra de botones.

8. Seleccionar ese botón y aplicarlo a los triángulos ADF, DBE y FEC, para obtener lo siguiente.



9. Repetir el procedimiento con todos los nuevos triángulos. (La secuencia es la siguiente)



ANEXO 11 – SESIÓN 3.

¿Cuál es la dimensión del triángulo inicial? Sustenta.

____

____

____

Mientras realizamos la práctica de construcción del triángulo de Sierpiński con ayuda de la guía vamos a ir llenando la información que se muestra a continuación:

	A - Objeto	N	B - Copia	r (Factor escala)
	Medida base del triángulo original ó inicial	Número de Triángulos al ser dividido	Medida base triangulo al ser divido	División B/A
1er vez				
2da vez				
3cer Vez				

Formula para hallar la dimensión	Iteración	Operación	Resultado - Dimensión
$D = \frac{Ln (N)}{Ln (1/r)}$	1er vez	Ln(____)/Ln(1/ ____)	
	2da vez	Ln(____)/Ln(1/ ____)	
	3cer Vez	Ln(____)/Ln(1/ ____)	

¿Cuál es la dimensión de auto semejanza en los tres casos, igual o diferente? ¿Por qué crees que esto es así?

____

____

¿Cuál es entonces la dimensión del triángulo de Sierpiński?____

¿La dimensión del fractal de Sierpiński es mayor o menor que la dimensión del triángulo inicial? Explica______________

____

____

____

¿Qué pasaría si repetimos el procedimiento anterior de forma indefinida, El triángulo inicial ¿Cómo quedaría? Explica.

____

____

____

Un triángulo se podría considerar un fractal ¿Sí o no? Explica.

____

____

____

Anexo 12 – Sesión 3

Co-evaluación.

En grupo proponen dos cosas que deban saber para responder la pregunta ¿Que es el triángulo de Sierpiński y cuál es su dimensión?, y cada estudiante se evalúa así:

a. Lo sé bien b. lo sé regular c. no lo sé

Fecha _______________ **Grado**__________

Actividad realizada: ____

Nombre del evaluador ____

Escriben dos cosas que deban saber para responder la pregunta ¿Qué es el triángulo de Sierpiński y cuál es su dimensión?,	**Cada estudiante dirá si** **a. Lo sé bien b. lo sé regular c. no lo sé**			
	Estudiante A **Nombre:**_______ ______________ _____________	**Estudiante B** **Nombre:**_______ _____________ _____________ _____________	**Estudiante C** **Nombre:**_______ _____________ _____________ _____________	**Estudiante D** **Nombre:**_______ ______________ _____________
1				
2				

Anexo 13 – Sesión 3

Fecha _______________ Grado__________

Actividad: El fractal o triángulo de Sierpiński

Nombre: ____

Autoevaluación

Dibujo y respondo

Preguntas	Dibujo mi respuesta	Escribo mi respuesta	Traducción del docente
¿Cómo fue la construcción del triángulo de Sierpiński?		___________________ ___________________ ___________________ ___________________	
¿Qué instrumentos de medida y observación utilice y cómo?		___________________ ___________________ ___________________	
¿Durante todo el trabajo que hice bien?		___________________ ___________________ ___________________ ___________________	
¿Durante todo el trabajo que debo mejorar? ¿En que tuve dificultad?		___________________ ___________________ ___________________ ___________________	
¿Qué aprendí?		___________________ ___________________ ___________________	

Anexo 20 –Sesión 3

Realizar un fractal libre con lo que has aprendido hasta ahora, también deben dibujar una forma que no sea fractal.

Dibuja una figura que no sea fractal y píntala por favor. ¿Por qué crees que tu dibujo no es un fractal? ____
Dibuja aquí un fractal como tú desees y píntalo por favor. ¿Por qué crees que este dibujo es un fractal? ____

ANEXO 14 – Sesión 4

NOMBRE: ______________________________ FECHA: ____________________

GRADO: ________________

Al observar las frutas, plantas y verduras que el docente presentó ¿Cuáles serían fractales para ti? ¿Por qué?

____
____
____

¿En qué dimensión crees que están aquellos objetos que no consideraste fractales? Explica

____
____
____

¿En qué dimensión crees que están aquellos objetos que dijiste eran fractales? ¿Por qué?

____
____
____

¿Habrán otros fractales a nuestro alrededor? ¿Cuáles?

____
____
____

Traducción del Docente

____
____
____

ANEXO 15 – SESIÓN 4.

Ingresar a Geogebra y seguir los siguientes pasos para construir la Alfombra de Sierpiński.

1. Crear los puntos:
A = (1, -2) **enter**; B = (4, -2) **enter**, C = (7, -2) **enter**, **D = (7, 1) enter**, **E = (7, 4) enter**, **F = (4, 4) enter**, **G = (1, 4) enter**, **H = (1, 1) enter**.

2. Crear lista así:
{A, B, C, D, E, F, G, H}

3. Crear punto central así:
I=(4,1) enter

4. Crear lista2 de la siguiente manera:
{Polígono(lista1)} enter

5. Crear la lista3 como se muestra:
lista3=Homotecia(lista2, 1 / 3, I) enter

6. Crear la lista4 como se muestra:
Secuencia(Homotecia(lista3, 1 / 3, Elemento(lista1, i)), i, 1, 8) enter

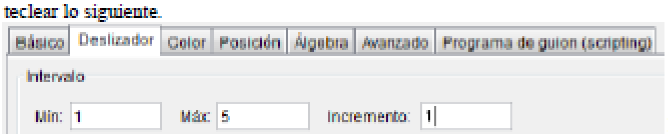
7. Crear la lista5 así:
Secuencia(Homotecia(lista4, 1 / 3, Elemento(lista1, i)), i, 1, 8) enter

8. Crear la lista6 a continuación:
Secuencia(Homotecia(lista5, 1 / 3, Elemento(lista1, i)), i, 1, 8) enter

9. Crear un deslizador **n** como se muestra a continuación o dar click en el icono 

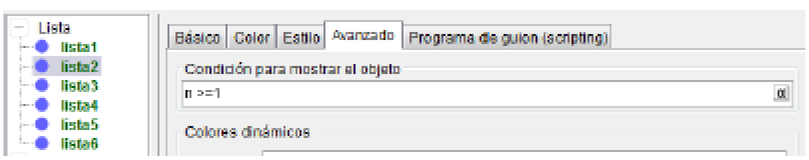
Deslizador:

n enter, aparece cuadro con **crear deslizador** teclear **ok**, luego darle click derecho sobre **n** y luego en propiedades, teclear lo siguiente.



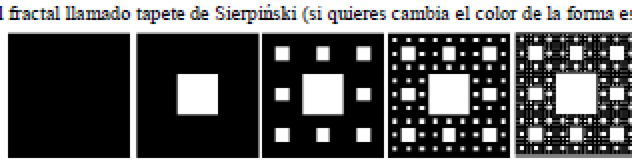
Luego cerrar las opciones

10. Seleccionar con click derecho **lista2**, darle sobre propiedades, ir hacia la pestaña **AVANZADO** y colocar:



Cerrar y repetir para las otras listas dar click derecho en **lista3** y colocar la condición **n>=2**, Luego dar click en **lista4** y colocar la condición **n>=3**, Luego dar click en **lista5** y colocar la condición **n>=4** y Luego dar click en **lista6** y colocar la condición **n>=5**, luego cerrar.

11. Finalmente se da click derecho sobre el deslizador **n** y se selecciona la opción **animación**, y veras la animación en secuencia del fractal llamado tapete de Sierpiński (si quieres cambia el color de la forma esto es opcional).



Anexo 16 – Sesión 4

Al finalizar la construcción del tapete de Sierpiński con ayuda de la guía vamos a llenar la información que se muestra a continuación:

	A - Objeto	N	B - Copia
	Medida del lado cuadrado Inicial cuando n=1	# de cuadrados similares al del centro n=2	Medida de 1 lado de cuadrados similares al del centro cuando n=2
1er vez			

r (Factor escala)
División B/A

Formula para hallar la dimensión del fractal	Iteración	Dimensión de Autosemejanza
$D = \frac{\text{Ln } N}{\text{Ln } (1/r)}$	1er vez	

¿Cómo es la dimensión fractal en este caso, mayor o menor que la forma inicial? ¿Por qué crees que esto es así? ____

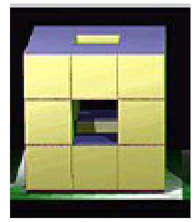
¿Cuál es entonces la dimensión del tapete de Sierpiński?____

¿Qué pasaría si repetimos el procedimiento anterior de forma indefinida?, El cuadrado inicial ¿Cómo quedaría? Explica.

Anexo 17 – Sesión 4

Con cubos de igual dimensión 27 unidades formar un cubo más grande y medir con una regla la longitud de una arista

Luego quitar un bloque pequeño de cada cara del cubo y uno del centro para formar la esponja de Menger, así:



Escribir en la siguiente tabla, la información solicitada para hallar la dimensión del fractal "La esponja de Menger"

	A - Objeto	N	B - Copia
	Medida de un lado del cubo completo	# de cubos al quitar uno de cada cara y uno del centro	Medida del lado de un cubo pequeño
1er vez			

r (Factor escala)
División B/A

Formula para hallar la dimensión del fractal	Iteración	Dimensión de la esponja de Menger
$D= \frac{Ln\ N}{Ln\ (1/r)}$	1er vez	

¿La dimensión de la esponja de Menger es mayor o menor que el cubo original? ¿Cuál es el valor de esa dimensión?.

Dimensión del cubo: ______________________ Dimensión de la esponja de Menger: ___________________

La dimensión de la esponja de Menger es______________________________ __________ _________________

____

¿Encuentras alguna relación entre el tapete de Sierpiński y la esponja de Menger?, Explica.

____

____

¿Entre que dimensiones enteras esta el tapete de Sierpiński y la esponja de Menger?, Explica.

El Tapete de Sierpiński está entre las dimensiones: ______ y la dimensión _______

La esponja de Menger está entre las dimensiones: ______ y la dimensión _______

Explica:____

____

____

Anexo 18 – Sesión 4

Co-evaluación.

En grupo proponen dos cosas que deban saber para responder la pregunta **¿Qué es la esponja de Menger y cuál es su dimensión?**, y cada estudiante se evalúa así:

a. Lo sé bien b. Lo sé regular c. No lo sé

Fecha _______________ **Grado**__________

Actividad realizada: ____

Nombre del evaluador ____

Escriben dos cosas que deban saber para responder la pregunta ¿Habrán fractales a nuestro alrededor? ¿Qué es la esponja de Menger y cuál es su dimensión?	**Cada estudiante dirá si** **a. Lo sé bien b. Lo sé regular c. No lo sé**			
	Estudiante A **Nombre:**_______ ______________ ______________	**Estudiante B** **Nombre:**_______ ______________ ______________ ______________	**Estudiante C** **Nombre:**_______ ______________ ______________ ______________	**Estudiante D** **Nombre:**_______ ______________ ______________
1				
2				

Anexo 19 – Sesión 4

Auto-evaluación

Fecha _______________ Grado__________

Actividad: El tapete de Sierpiński y la esponja de Menger

Nombre: ____

Autoevaluación

Dibujo y respondo

Preguntas	Dibujo mi respuesta	Escribo mi respuesta	Traducción del docente
¿Cómo fue la construcción del tapete de Sierpiński y de la esponja de Menger?			
¿Qué instrumentos de medida y observación utilice y cómo?			
¿Durante todo el trabajo que hice bien?			
¿Durante todo el trabajo que debo mejorar? ¿En que tuve dificultad? ¿Qué hice mal?			
¿Qué aprendí?			

Anexo C. Análisis de la información.

Cuestionario Inicial

Estudiai	Nombre del Estudiante	Pregun ta 1	Pregunta 1.1	Pregunt a 2	Pregunt a 2.1	Pregunt a 3	Pregunt a 3.1	Pregunt a 3.2	Pregunt a 4	Pregunt a 4.1	Pregunt a 5	Cuestion ario Inicial	Promedio
1	Agudelo Pendiente Diego Alejandro	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	7	7,5
2	Agudelo Sandoval Danna Alexandra	0	1	0	1	0	1	0	0	1	2	6	7,5
3	Alcalde Jaramillo Luis Arbey	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	4	7,5
4	Alvarez Castañeda Maria Camila	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	6	7,5
5	Alvarez Mejia Esteban	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	4	7,5
6	Arroyave Gonzalez Valeria	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	6	7,5
7	Atehortua Acevedo Kelly Manuela	1	2	1	3	0	1	1	1	3	1	14	7,5
8	Balladares Huertas Miguel Angel	0	1	1	2	0	1	1	0	1	1	8	7,5
9	Barona Laverde Jojhan	1	3	0	0	0	1	0	0	1	1	7	7,5
10	Cardona Marulanda Lina Marcela	0	1	0	2	0	1	3	0	1	1	9	7,5
11	Carvajal Rodriguez Robert	1	2	1	3	0	1	1	1	3	1	14	7,5
12	Castañeda Bedoya Darlyn	1	1	1	3	0	1	1	1	3	1	13	7,5
13	Correa Cardona Andrea	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	6	7,5
14	Diaz Aguirre Jhonier	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	4	7,5
15	Echeverri Rodriguez Angie Natalia	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	6	7,5
16	Fernandez Palacio Mateo Steven	1	3	0	1	0	1	0	1	1	1	9	7,5
17	Galindo Hernandez Edison Santiago	0	1	0	1	0	1	1	0	1	2	7	7,5
18	Garcia Bedoya Michelle	1	1	1	3	0	1	1	1	2	1	12	7,5
19	Gomez Castrillon Alison	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	4	7,5
20	Gomez Osorio Valentina	1	1	1	3	0	1	3	1	2	1	14	7,5
21	Guapacha Medina Valentina	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	6	7,5
22	Herrera Rivera Valentina	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	5	7,5
23	Lopez Cardona Maria Dahiana	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	8	7,5
24	Lopez Naranjo Arantxa	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	7	7,5
25	Lopez Rodriguez Hernan Alejandro	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	6	7,5
26	Lopez Tamayo Juanita	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	7	7,5
27	Madrigal Ramirez Sebastian	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	3	7,5
28	Mantilla Pendiente Brayan	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	5	7,5
29	Mejia Suarez Nestor David	1	3	0	1	1	1	1	0	1	1	10	7,5
30	Morales Giraldo Alejandra	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	6	7,5
31	Mosquera Ramirez Santiago	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	7	7,5
32	Muñoz Lopez Viviana	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	9	7,5
33	Osorio Agudelo Mariana	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	5	7,5
34	Patiño Gil Briyid Esmeralda	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	6	7,5
35	Rincon Galan Marlon	1	3	0	1	0	0	1	1	3	2	12	7,5
36	Ruiz Vargas Gina Maria	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	8	7,5
37	Sanchez Aranzazu Daniela	1	1	1	1	0	1	3	0	1	2	11	7,5
38	Taborda Soto Juan Felipe	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	4	7,5
39	Upegui Villada Juan Esteban	0	1	0	1	0	1	1	0	1	2	7	7,5
40	Vidal Toro Valentina	0	1	0	1	0	1	3	0	1	1	8	7,5
41	Villada Taborda Jhonatan	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	5	7,5
42	Zapata Correa Valentina	0	1	0	1	0	1	3	0	1	1	8	7,5
	Número de Pregunta	Pregunt	Pregunta	Pregunta	Pregunta	Pregunt	Pregunta	Pregunta	Pregunta	Pregunta	Pregunta	otal Grupo	
	Puntaje Alcanzado por pregunta	19	50	11	50	4	36	40	9	49	45	313	
	Puntaje Máximo	42	126	42	126	42	126	126	42	126	126	924	
	Porcentaje Alcanzado	45,24%	39,68%	26,19%	39,68%	9,52%	28,57%	31,75%	21,43%	38,89%	35,71%	33,87%	

VALORACIÓN	PUNTAJE OBTENIDO	Alumno	Porcentaje
BAJO	0 - 9	34	81%
MED	10 - 16	8	19%
ALTO	17 - 22	0	0%
	Total	42	100%

24	57,14%	est. bajo la media
42		

Promed	7,5

Cuestionario Final

Estudian	Nombre del Estudiante	Pregunta 1	Pregunta 1.1	Pregunta 2	Pregunta 2.1	Pregunta 3	Pregunta 3.1	Pregunta 3.2	Pregunta 4	Pregunta 4.1	Pregunta 5	Cuestionario Final	Promedio
1	Agudelo Pendiente Diego Alejandro	1	2	1	2	1	3	1	1	2	0	14	14,2
2	Agudelo Sandoval Danna Alexandra	1	2	1	2	1	3	3	1	3	2	19	14,2
3	Alcalde Jaramillo Luis Arbey	0	1	0	2	0	1	3	0	1	1	9	14,2
4	Alvarez Castañeda Maria Camila	1	3	1	3	1	3	2	1	3	2	20	14,2
5	Alvarez Mejia Esteban	1	2	1	2	1	3	3	1	3	1	18	14,2
6	Arroyave Gonzalez Valeria	1	1	1	2	1	3	3	1	2	2	17	14,2
7	Atehortua Acevedo Kelly Manuela	1	1	1	3	1	3	3	1	3	3	20	14,2
8	Balladares Huertas Miguel Angel	1	1	1	2	1	1	3	1	2	1	14	14,2
9	Barona Laverde Jojhan	1	1	1	1	1	1	3	1	2	2	14	14,2
10	Cardona Marulanda Lina Marcela	0	1	0	2	0	1	3	0	1	1	9	14,2
11	Carvajal Rodriguez Robert	1	3	0	1	1	2	3	1	2	2	16	14,2
12	Castañeda Bedoya Darlyn	1	1	1	3	0	1	1	3	3	1	15	14,2
13	Correa Cardona Andrea	1	1	1	0	1	2	3	1	1	1	12	14,2
14	Diaz Aguirre Jhonier	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	9	14,2
15	Echeverri Rodriguez Angie Natalia	1	3	0	1	1	3	2	1	2	1	15	14,2
16	Fernandez Palacio Mateo Steven	1	3	0	1	0	1	1	3	1	1	12	14,2
17	Galindo Hernandez Edison Santiago	1	1	1	1	0	1	3	1	2	2	13	14,2
18	Garcia Bedoya Michelle	0	2	0	2	0	1	3	0	1	3	12	14,2
19	Gomez Castrillon Alison	0	1	1	0	1	1	3	0	1	0	8	14,2
20	Gomez Osorio Valentina	1	1	1	3	1	3	3	1	3	3	20	14,2
21	Guapacha Medina Valentina	1	2	1	2	1	3	1	1	3	1	16	14,2
22	Herrera Rivera Valentina	1	1	1	0	1	1	3	0	1	0	9	14,2
23	Lopez Cardona Maria Dahiana	0	2	0	1	0	1	3	0	1	3	11	14,2
24	Lopez Naranjo Arantxa	1	2	1	2	1	3	1	1	3	1	16	14,2
25	Lopez Rodriguez Hernan Alejandro	1	1	1	1	1	2	2	1	1	0	11	14,2
26	Lopez Tamayo Juanita	0	1	0	1	1	2	3	1	1	1	11	14,2
27	Madrigal Ramirez Sebastian	1	1	1	1	1	2	1	1	1	0	10	14,2
28	Mantilla Pendiente Brayan	1	1	1	2	1	3	1	1	2	2	15	14,2
29	Mejia Suarez Nestor David	1	1	1	1	1	1	3	1	1	2	13	14,2
30	Morales Giraldo Alejandra	1	2	1	2	1	3	1	1	3	1	16	14,2
31	Mosquera Ramirez Santiago	1	1	1	3	0	1	3	1	2	2	15	14,2
32	Muñoz Lopez Viviana	1	3	0	1	1	3	2	1	2	1	15	14,2
33	Osorio Agudelo Mariana	1	2	1	2	1	3	2	1	2	0	15	14,2
34	Patiño Gil Briyid Esmeralda	1	0	1	2	1	3	1	1	3	1	14	14,2
35	Rincon Galan Marlon	1	1	1	1	0	2	2	1	3	3	15	14,2
36	Ruiz Vargas Gina Maria	1	1	1	3	1	3	3	1	3	3	20	14,2
37	Sanchez Aranzazu Daniela	1	3	1	3	1	3	2	1	3	2	20	14,2
38	Taborda Soto Juan Felipe	1	1	1	2	1	1	3	1	1	1	13	14,2
39	Upegui Villada Juan Esteban	1	1	1	1	0	1	3	1	1	2	12	14,2
40	Vidal Toro Valentina	0	1	1	2	1	3	3	1	3	1	16	14,2
41	Villada Taborda Jhonatan	1	1	1	2	1	3	3	1	1	1	15	14,2
42	Zapata Correa Valentina	0	0	1	2	1	3	3	1	2	1	14	14,2
	Número de Pregunta	Pregun	Pregunt	Pregun	Pregunta	Pregur	Pregunt	Pregunta	Pregunta 4	Pregunta 4	Pregunta 5	Total Grupo	
	Puntaje Alcanzado por pregunta	34	61	33	70	32	88	99	40	82	59	598	
	Puntaje Máximo	42	126	42	126	42	126	126	42	126	126	924	
	Porcentaje Alcanzado	81,0%	48,4%	78,6%	55,6%	76,2%	69,8%	78,6%	95,2%	65,1%	46,8%	64,7%	

VALORACI	PUNTAJE OBTENIDO	Alumno	orcentaje
BAJO	0 - 9	5	12%
MEDI	10 - 16	29	69%
ALTO	17 - 22	8	19%
	Total	42	100%

Promed	14,2

Comparación

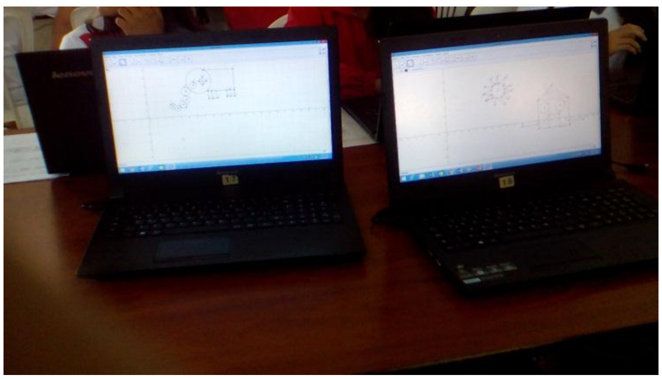
Estudiante #	C. Inicial	C. Final	Medio	Alto
1	7	14	10	17
2	6	19	10	17
3	4	9	10	17
4	6	20	10	17
5	4	18	10	17
6	6	17	10	17
7	14	20	10	17
8	8	14	10	17
9	7	14	10	17
10	9	9	10	17
11	14	16	10	17
12	13	15	10	17
13	6	12	10	17
14	4	9	10	17
15	6	15	10	17
16	9	12	10	17
17	7	13	10	17
18	12	12	10	17
19	4	8	10	17
20	14	20	10	17
21	6	16	10	17
22	5	9	10	17
23	8	11	10	17
24	7	16	10	17
25	6	11	10	17
26	7	11	10	17
27	3	10	10	17
28	5	15	10	17
29	10	13	10	17
30	6	16	10	17
31	7	15	10	17
32	9	15	10	17
33	5	15	10	17
34	6	14	10	17
35	12	15	10	17
36	8	20	10	17
37	11	20	10	17
38	4	13	10	17
39	7	12	10	17
40	8	16	10	17
41	5	15	10	17
42	8	14	10	17

19	34	42	45,2%	81,0%
50	61	126	39,7%	48,4%
11	33	42	26,2%	78,6%
50	70	126	39,7%	55,6%
4	32	42	9,5%	76,2%
36	88	126	28,6%	69,8%
40	99	126	31,7%	78,6%
9	40	42	21,4%	95,2%
49	82	126	38,9%	65,1%
45	59	126	35,7%	46,8%
313	598	924	33,9%	64,7%

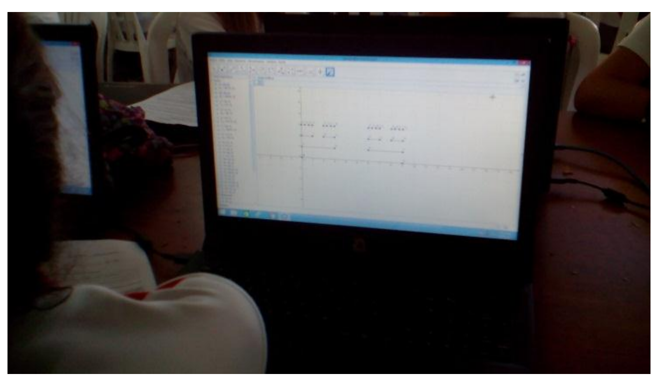
VALORACIÓN	PUNTAJE OBTENIDO	# Alumnos	Pretest	# Alumnos	Postest
BAJO	0 - 9	34	81%	5	12%
MEDIO	10 - 16	8	19%	29	69%
ALTO	17 - 22	0	0%	8	19%

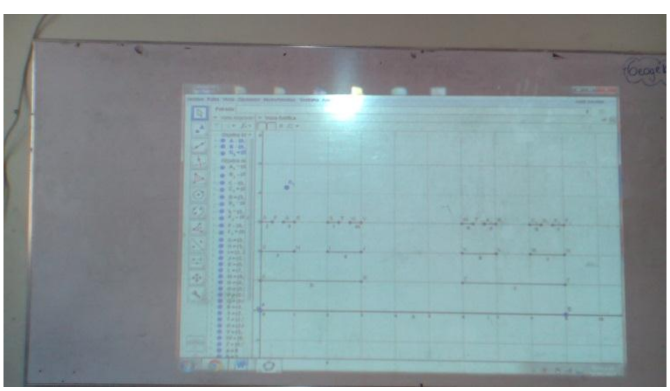
Anexo D. Evidencias Fotográficas.

Sesión #1

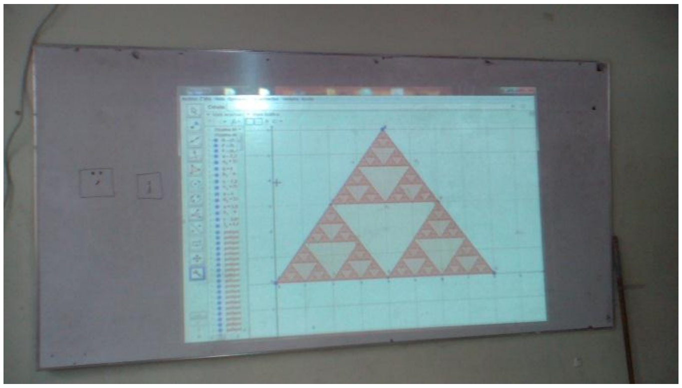
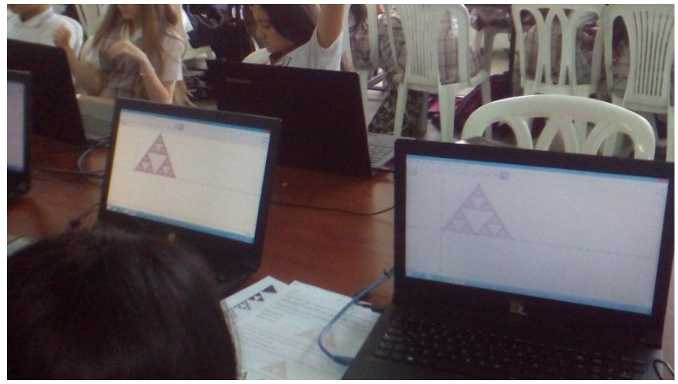


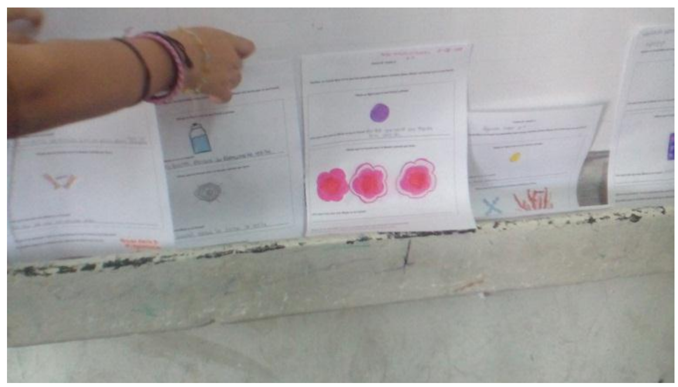
Sesión #2



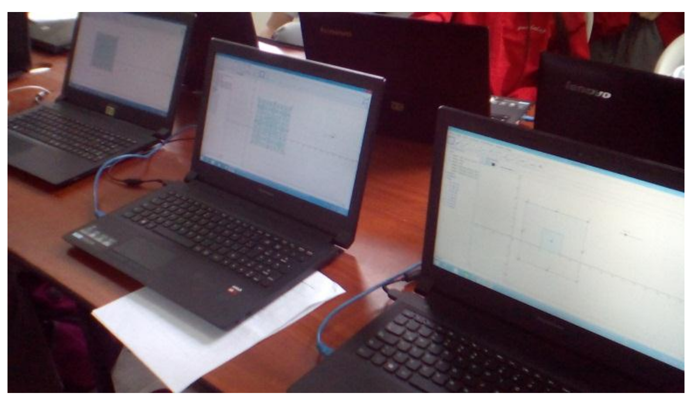


Sesión #3



Sesión #4

Anexo E. Imágenes de cuestionarios y guías.

Universidad Tecnológica de Pereira	*UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA*	
	MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA	
ENSEÑANZA DE LA DIMENSIÓN FRACTAL USANDO HERRAMIENTAS COMPUTACIONALES		
CUESTIONARIO	*NOMBRE:* Daniela Sánchez Aranzazu *GRADO:* 8°A	*FECHA: (día / mes / año)* 12 / 07 / 17

INDICACIONES: Apreciado estudiante, a continuación usted encontrará una serie de preguntas que constan de ***un*** *enunciado y* ***cuatro*** *opciones de respuesta, de las cuales* ***sólo una*** *es la correcta, la cual deberá marcar con una* ***"X" o un "Circulo"****.* Luego de cada interrogante habrá una serie de cuestionamientos de cómo resolvió cada pregunta. Agradecemos responder de la forma más **sincera** y **honesta** posible.

1) A continuación se presentan diferentes tipos de figuras. ¿Cuál crees que es la dimensión asociada a cada una de ellas, según el siguiente orden?

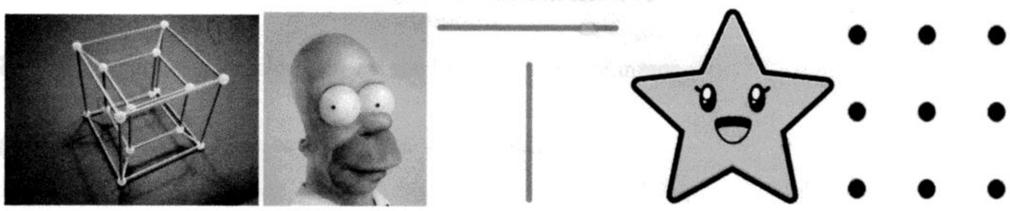


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5

a) Dimensión 1 – 3 – 2 – 4 - 0

b) Dimensión 4 – 3 – 1 – 2 - 0

c) Dimensión 3 – 4 – 0 - 2 - 1

d) Dimensión 2 - 3 – 1- 0 - 4

1.1.¿Por qué crees que esas imágenes tienen la dimensión que seleccionaste? ¿Recordaste algún tema?

No sé

Universidad Tecnológica de Pereira	*UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA*	
	MAESTRíA EN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA	
ENSEÑANZA DE LA DIMENSIÓN FRACTAL USANDO HERRAMIENTAS COMPUTACIONALES		
CUESTIONARIO	*NOMBRE:* Daniela Sánchez Aranzazu *GRADO:* 8°A	*FECHA: (día / mes / año)* 4 / 09 / 2017

*INDICACIONES: Apreciado estudiante, a continuación usted encontrará una serie de preguntas que constan de **un** enunciado y **cuatro** opciones de respuesta, de las cuales **sólo una** es la correcta, la cual deberá marcar con una **"X" o un "Circulo"**.* Luego de cada interrogante habrá una serie de cuestionamientos de cómo resolvió cada pregunta. Agradecemos responder de la forma más **sincera** y **honesta** posible.

1) A continuación se presentan diferentes tipos de figuras. ¿Cuál crees que es la dimensión asociada a cada una de ellas, según el siguiente orden?

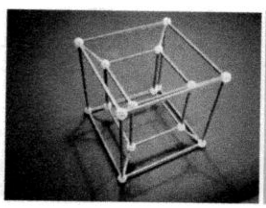


Figura 1

Figura 2

Figura 3

Figura 4

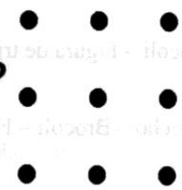


Figura 5

a) Dimensión 1 – 3 – 2 – 4 - 0

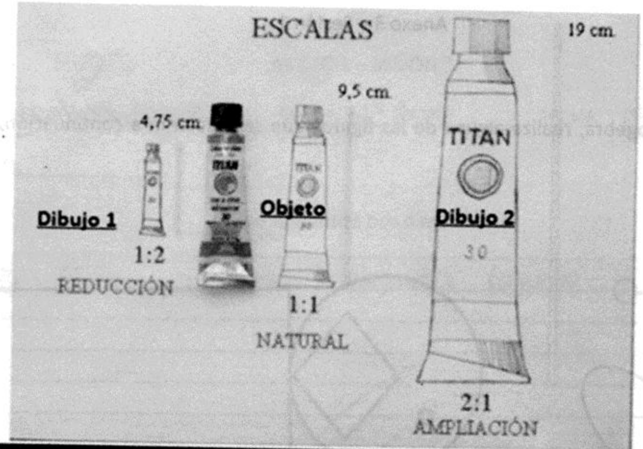
b) Dimensión 4 – 3 – 1 – 2 - 0

c) Dimensión 3 – 4 – 0 - 2 - 1

d) Dimensión 2 - 3 – 1- 0 - 4

1.1.¿Por qué crees que esas imágenes tienen la dimensión que seleccionaste? ¿Recordaste algún tema?

Recordé la temática de las dimensiones, la figura 5 es dimensión 0 porque no tiene ni largo ni ancho ni profundidad, por ejemplo la figura 3 es dimensión 1 porque unicamente tiene largo.



1

		Tus mediciones (cm ó mm)		Resultado al Dividir
Medida Lado Dibujo 1 / Medida Lado Objeto	=	4,75 cm / 9,5 cm	=	0,5 cm

2

		Tus mediciones (cm ó mm)		Resultado al Dividir
Medida Lado Dibujo 2 / Medida Lado Objeto	=	19 cm / 9,5 cm	=	2 cm

3

		Tus mediciones (cm ó mm)		Resultado al Dividir
Medida Lado Objeto / Medida Lado Objeto	=	9,5 cm / 9,5 cm	=	1 cm

En los casos anteriores el resultado al dividir, ¿Cuándo es igual a 1? ¿Cuándo es mayor a 1? ¿Cuándo es menor a 1?

Explica: la 3ra es igual a 1, la 2da es mayor que 1 y la primera menor que 1

Traducción del docente:

Mª Camila Álvarez Castañeda
Lina Marcela Cardona

ANEXO 5 – SESIÓN 2.

NOMBRE: Daniela Sánchez Aranzazu FECHA: 27 Julio 2017

GRADO: 8°

¿Sabes que es un fractal? Si___ Explica: ___ No: X

¿Qué dimensión tiene una línea recta horizontal o vertical? Sustenta.

Dimensión 1. Porque tiene largo, más no ancho.

Mientras realizamos la práctica con material didáctico del conjunto de cantor guiado por el docente vamos a ir llenando la información que se muestra a continuación (Parejas):

	A - Objeto	N		B - Copia	r (Factor escala)
	Medida figura antes de dividirla	Divisiones del papel	Al doblar 1 del medio quedan	Medida de una división	División B/A
1er vez	216	3	2	67	67/216=0.31
2da vez	216	2	4	25	25/67=0.11
3cer Vez	216	4	8	8	8/25=0.037

Formula para hallar la dimensión	Iteración	Dimensión de Autosemejanza
D= $\frac{\text{Ln N}}{\text{Ln (1/r)}}$	1er vez	=ln(2)/Ln(1/0,33) = 0,6252102
	2da vez	0'625
	3cer Vez	0'625

¿Cuál es la dimensión de auto semejanza en los tres casos, igual o diferente? ¿Por qué crees que esto es así?

Igual. Porque siempre se divide de la misma manera.

¿Cuál era la dimensión de la forma original? dimensión 1.

¿Cuál es entonces la dimensión del fractal de Cantor? 0'625

¿La dimensión del fractal de cantor es mayor o menor que la dimensión de la forma original? es menor.

Observando la construcción del fractal cómo definirías un fractal: Es una división o rasgamiento de cualquier figura en cualquier dimensión

ANEXO 11 – SESIÓN 3.

¿Cuál es la dimensión del triángulo inicial? Sustenta.

es dimensión 2 porque tiene largo + ancho pero no profundidad

Mientras realizamos la práctica de construcción del triángulo de Sierpinsky con ayuda de la guía vamos a ir llenando la información que se muestra a continuación:

	A - Objeto	N	B - Copia	r (Factor escala)
	Medida base del triangulo antes de dividirlo	# de triangulos	Medida base triangulo al ser dividido	División B/A
1er vez	48	3	24	0,5
2da vez	48	9	12	0,25
3cer Vez	48	27	6	0,125

$D = \frac{Ln(3)}{ln(2)} = 1{,}585$

Formula para hallar la dimensión	Iteración	Dimensión de Autosemejanza
$D = \frac{Ln\,N}{Ln\,(1/r)}$	1er vez	1,585
	2da vez	1,585
	3cer Vez	1,585

¿Cuál es la dimensión de auto semejanza en los tres casos, igual o diferente? ¿Por qué crees que esto es así?

igual porque el resultado es el mismo

¿Cuál es entonces la dimensión del triángulo de Sierpinsky? 1,585

¿La dimensión del fractal de Sierpinsky es mayor o menor que la dimensión del triángulo inicial? Explica menor

porque la inicial mide dos + + el segundo triangulo mide 1,5

¿Qué pasaría si repetimos el procedimiento anterior de forma indefinida, El triángulo inicial ¿Cómo quedaría? Explica.

se vería muy poco

Un triángulo se podría considerar un fractal ¿Sí o no? Explica.

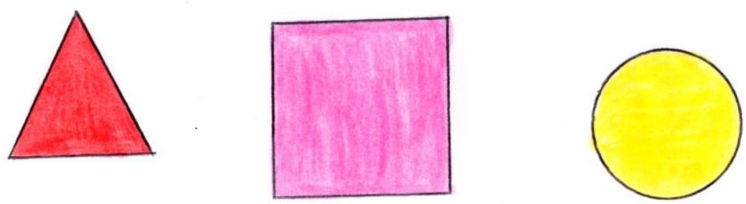
no porque la dimensión es exacta

Valentina zapata. 8°A.

Anexo 20 –Sesión 4

Realizar un fractal libre con lo que has aprendido hasta ahora, también deben dibujar una forma que no sea fractal.

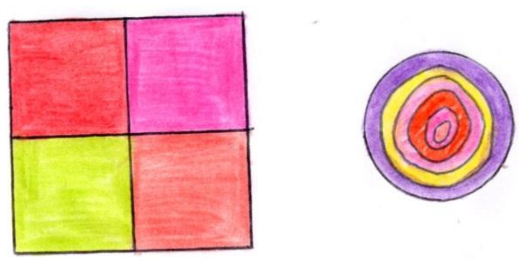
Dibuja un figura que no sea fractal y píntala



¿Por qué crees que tu dibujo no es un fractal?

Porqué no sa rapita

Dibuja aquí un fractal como tú desees y píntalo por favor.



¿Por qué crees que este dibujo es un fractal?

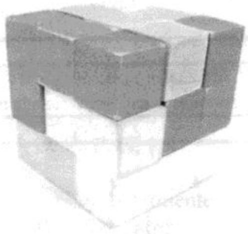
Porqué se rapita varas vecas

Éxitos en tu actividad: "Usa tu creatividad para crear fractales impresionantes"

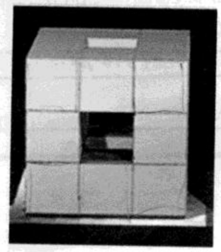
Se pueden pegar en el tablero para observar los diferentes fractales.

Anexo 17 – Sesión 4

Con cubos de igual dimensión 27 unidades formar un cubo más grande y medir con una regla la longitud de una arista



Luego quitar un bloque pequeño de cada cara del cubo y uno del centro para formar la esponja de Menger, así:



Escribir en la siguiente tabla, la información solicitada para hallar la dimensión del fractal "La esponja de Menger"

	A - Objeto	N	B - Copia
	Medida de un lado del cubo completo	# de cubos al quitar uno de cada cara y uno del centro	Medida del lado de un cubo pequeño
1er vez	6 cm	20	2 cm

r (Factor escala)
División B/A
0,33

Formula para hallar la dimensión del fractal	Iteración	Dimensión de la esponja de Menger
D= $\frac{\text{Ln N}}{\text{Ln (1/r)}}$ $\frac{(20)}{\frac{1}{0,33}}$	1er vez	≃ 2,7

¿La dimensión de la esponja de Menger es mayor o menor que el cubo original? ¿Cuál es el valor de esa dimensión?.

Dimensión del cubo: 3 Dimensión de la esponja de Menger: 2,7

La dimensión de la esponja de Menger es menor que la del cubo

¿Encuentras alguna relación entre el tapete de Sierpinsky y la esponja de Menger?, Explica.

que son cubos y que a la esponja al hacerlo mal huecos quedara como el tapete

¿Entre que dimensiones enteras esta el tapete de Sierpinsky y la esponja de Menger?, Explica.

El Tapete de Sierpinsky está entre las dimensiones: 1 y la dimensión 2

La esponja de Menger está entre las dimensiones: 2 y la dimensión 3

Explica: por que el tapet el de dimension, 1,87 y la esponja es de 2,7